•Integrali Doppi

Se $f:[a,b]x[c,d] \to R$ è continua, il limite e s i s t e finito e prende il nome di integrale doppio di f sul rettangolo [a,b]x[c,d]. Se f è definita su un insieme Ω limitato si considera il rettangolo [a,b]x[c,d] che contiene Ω e si definisce f in tutto il rettangolo ponendola uguale a zero fuori da Ω e si integra sul rettangolo la funzione cosi ottenuta.

Il significato geometrico è il volume della regione compresa tra il rettangolo [a,b]x[c,d] e il grafico di f.

Un *insieme* E si dice y-*semplice* se è del tipo $E=\{(x,y)\in R^2: x\in[a,b], g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, questo significa che tagliando E con una retta perpendicolare all'asse x si ottiene sempre un segmento. Lo stesso vale se E è x-semplice cioè $E=\{(x,y)\in R^2: y\in[c,d], h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$. E si dirà semplice se x-semplice o y-semplice. Si dirà *regolare* se è unione di un numero finito di insiemi semplici.

Se D è connesso vale il *teorema della media*: esiste un punto $(x_0,y_0) \in D$ tale che

•Equazioni differenziali

Ogni funzione t derivabile in un intervallo $I\subseteq R$ tale che $F(t,\varphi(t),\varphi'(t))=0\ \forall t$, si dice *soluzione o integrale* dell'equazione $F(t,y(t),y'(t))$.

Il *teorema di esistenza e unicità locale* per la soluzione del problema di Cauchy afferma che se consideriamo il probl. di Cauchy $y'=a(t),b(y)$ e $y(t_0)=y_0$ e se la funzione a(t) è continua in un intorno di t_0 e la funzione b(y) è derivabile con continuità in un intorno di y_0 allora il problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione, definita almeno in un intorno di t_0.

Il *teorema di esistenza e unicità globale* per la soluzione del problema di Cauchy afferma che se consideriamo il probl. di Cauchy $y'+a(t)y=f(t)$ e $y(t_0)=y_0$ e se le funzioni a(t) e f(t) sono continue in I; $\forall t_0 \in I$ e $\forall y_0 \in R\ \exists$ ed è unica la soluzione del problema di Cauchy in I.

Principio di sovrapposizione: se $y'+a(t)y=f(t)$ e $z'+a(t)z=g(t)$ allora se $y+z=w$ allora $w'+a(t)w=f(t)+g(t)$.

La generica soluzione dell'equazione lineare completa è somma della generica soluzione dell'equazione omogenea associata e di una qualsiasi particolare soluzione dell'equazione lineare completa.

Due *integrali/soluzioni* $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dell'equazione omogenea associata sull'intervallo I si dicono *indipendenti* se non esistono due costanti c_1,c_2 (non nulle entrambe) per cui si abbia $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)=0$ ossia due soluzioni sono indipendenti se il loro rapporto non è costante. La condizione necessaria e sufficiente perché le due soluzioni siano indipendenti è che il determinante della *matrice wronskiana* sia diverso da zero in ogni punto di I. Ne consegue che se $y_1(t),y_2(t)$ sono due soluzioni indipendenti dell'eq. omogenea associata sull'intervallo I, ogni altra soluzione è combinazione lineare di queste.

•Serie Numeriche

La serie si dirà convergente, divergente, irregolare a seconda che la successione Sn sia convergente, divergente o irregolare. Nel caso sia convergente, il limite di Sn per $n\to+\infty$, si dirà *somma della serie*.

Condizione necessaria affinché una serie Σa_n converga è che il termine generale a_n tenda a zero. La stessa serie a termini non negativi o è convergente o è divergente a $+\infty$. Essa converge se e solo se la successione delle somme parziali n-esime è limitata (criterio del confronto, del confronto asintotico, della radice, del rapporto). Una serie Σa_n si dirà *assolutamente convergente* se converge la serie $\Sigma|a_n|$.

Criterio di Leibniz: sia data la serie $\Sigma(-1)^n a_n$ se la successione a_n è decrescente e $\lim n\to+\infty\ a_n=0$ allora la serie è convergente.

•Serie di Taylor e serie di funzioni

Siano $f_n:[a,b] \to R$, n=1,2,3,… diremo che la serie Σf_n *converge totalmente* se: $|f_n(x)|\le a_n\ \forall x\in[a,b]$ e se Σa_n converge.

L'insieme di convergenza di una serie di potenze, quando non è l'insieme vuoto, o si riduce a un punto, oppure è un intervallo I (chiuso o aperto, limitato o illimitato).

Se una serie di potenze converge in un intervallo I, allora converge totalmente in ogni intervallo chiuso strettamente interno ad I.

Se una serie di potenze converge in un intervallo I, la serie di potenze che si ottiene derivando termine a termine converge nello stesso intervallo I.

Le serie di potenze (in particolare le serie di Taylor) in ogni intervallo chiuso strettamente interno all'intervallo di convergenza I: hanno per somma funzioni continue; si possono integrare termine a termine indefinitamente (cioè quante volte si vuole); si possono derivare termine a termine indefinitamente.

Criterio dl Dirichelet: siano a_n e b_n successioni positive, monotone decrescenti e tendenti a 0; allora la serie di Fourier converge in tutti i punti dell'intervallo $[O,2\pi]$, tranne, al più gli estremi.