

3. ANTENNE LINEARI

3.1 CALCOLO DEI PARAMETRI DI ANTENNE LINEARI

Abbiamo dimostrato che data una distribuzione di correnti elettriche nella direzione z lungo un tratto di lunghezza l e di sezione trasversa infinitesima (*corrente lineare filiforme*):

$$\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') = J_z(x', y', z') \underline{\mathbf{z}}_o = I(z') \delta(x') \delta(y') \underline{\mathbf{z}}_o$$

ove le funzioni impulsive δ hanno dimensione $1/m$, il potenziale magnetico associato a grande distanza (zona di Fraunhofer dove $r > 2l^2/\lambda$) ha la seguente espressione:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = A_z(\underline{\mathbf{r}}) \underline{\mathbf{z}}_o = \underline{\mathbf{z}}_o \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} I(z') e^{jkz' \cos \theta} dz'$$

ove $I(z)$ è il fasore della corrente (dipendente da z) che scorre attraverso la sezione sull'antenna. Considerando che a grande distanza $\nabla[\cdot] \cong -j\mathbf{k}[\cdot]$ (essendo la dipendenza da r del campo e.m. del tipo $\exp(-jkr)$) e che il vettore di propagazione vale $\mathbf{k} = k\mathbf{r}_o$, il campo elettrico in zona di Fraunhofer si ottiene dal potenziale vettore mediante:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \cong j\omega\mu A_z(z) \sin \theta \underline{\mathbf{z}}_o = j \frac{\eta}{2\lambda r} \sin \theta e^{-jkr} N_z(\theta) \underline{\mathbf{z}}_o$$

dove il *momento elettrico* N_z dell'antenna è definito da:

$$N_z(\theta) = \int_{-l/2}^{l/2} I(z') e^{jkz' \cos \theta} dz'$$

Introducendo la *lunghezza (o altezza) elettrica equivalente* dell'antenna esprimibile in funzione del momento N_z :

$$\underline{\mathbf{h}}(\theta, \varphi) = \sin \theta \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I(z')}{I_o} e^{jkz' \cos \theta} dz' \underline{\mathbf{z}}_o = \frac{\sin \theta}{I_o} N_z(\theta) \underline{\mathbf{z}}_o$$

con $I_o = I(0)$ il fasore della corrente impressa ai morsetti dell'antenna (ovvero la corrente I_g nel circuito equivalente serie dell'antenna in trasmissione), il campo si può anche esprimere come:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{j\eta I_o}{2\lambda r} e^{-jkr} \underline{\mathbf{h}}(\theta, \varphi)$$

Anche il campo magnetico a grande distanza può essere derivato dal potenziale vettore mediante:

$$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) \cong -j\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = -jk\mathbf{r}_o \times A_z(\underline{\mathbf{r}}) \underline{\mathbf{z}}_o$$

ovvero dalla I eq. di Maxwell considerando che a grande distanza $\nabla \times [\cdot] \cong -j\mathbf{k} \times [\cdot] = -jk\mathbf{r}_o \times [\cdot]$:

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{-j\omega\mu} \cong \frac{-j\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{-j\omega\mu} = \frac{k\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{\omega\mu} = \frac{\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{\eta}$$

Nota

A rigore, la funzione $\underline{\mathbf{h}}(\theta, \varphi)$ precedentemente introdotta dovrebbe essere denominata “**lunghezza equivalente in trasmissione**” (analogamente alla direttività D , definita per l’antenna in trasmissione). Ciò per distinguerla dalla “**lunghezza equivalente in ricezione**” $\underline{\mathbf{h}}(\theta, \varphi)$, introdotta in concomitanza con il circuito equivalente che rappresenta l’antenna in ricezione (analogamente all’area equivalente A_e , definita per l’antenna in ricezione). Tuttavia, in virtù del teorema di reciprocità, è possibile dimostrare che le due lunghezze equivalenti sono uguali e d’ora in avanti ci riferiremo ad una unica lunghezza equivalente senza incorrere in ambiguità. Tale risultato non è d’altronde sorprendente in quanto anche $D(\theta, \varphi)$ e $A_e(\theta, \varphi) = (\lambda^2/4\pi)D(\theta, \varphi)$.

La dimostrazione di tale proprietà e la trattazione dell’antenna in ricezione è oggetto di altro modulo del corso di Antenne.

3.1.a Parametri di antenne lineari

- Per le antenne lineari esprimiamo l’intensità di radiazione ed altri parametri in funzione della lunghezza elettrica equivalente $\underline{\mathbf{h}}$.

- A partire dalle espressioni del campo e.m. $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{H}}$ e considerando che $\underline{\mathbf{E}}$ è ortogonale a \mathbf{r}_o , è possibile calcolare il **Vettore di Poynting** $[W/m^2]$:

$$\underline{\mathbf{P}}_\infty(\mathbf{r}, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2\eta} \underline{\mathbf{E}} \times \mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{E}}^* = \frac{1}{2\eta} [\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^* - \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{E}}^* \cdot \mathbf{r}_o)] = \frac{1}{2\eta} |\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \theta, \varphi)|^2 \mathbf{r}_o = \frac{\eta l_0^2}{8\lambda^2 r^2} |\underline{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, \theta, \varphi)|^2 \mathbf{r}_o$$

- La **Intensità di radiazione** $[W/sr]$ U e la **Intensità di radiazione normalizzata** U_n si esprimono pertanto:

$$U(\theta, \varphi) = |\underline{\mathbf{P}}_\infty(\mathbf{r}, \theta, \varphi)| r^2 = \frac{\eta l_0^2}{8\lambda^2} |\underline{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, \theta, \varphi)|^2 \quad U_n(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{U(0,0)} = \frac{|\underline{\mathbf{h}}(\theta, \varphi)|^2}{\text{Max}[|\underline{\mathbf{h}}(\theta, \varphi)|^2]} = |\underline{\mathbf{h}}_n(\theta, \varphi)|^2$$

- La **Potenza trasmessa (o irradiata)** $[W]$ W_T si ricava con la seguente nota relazione:

$$W_T = W_r = \oint_S \underline{\mathbf{P}}_\infty(\mathbf{r}, \theta, \varphi) \cdot \underline{\mathbf{n}}_o dS = \int_{4\pi} P_\infty(\mathbf{r}, \theta, \varphi) r^2 d\Omega = \int_{4\pi} U(\theta, \varphi) d\Omega$$

- da cui è possibile ricavare i principali parametri di un’antenna lineare, ovvero **Angolo solido di radiazione** $[sr]$ Ω_p , **Efficienza del lobo principale** $[adim]$ η_M e **Direttività** $[1/sr]$ $D(\theta, \varphi)$:

$$\Omega_p \equiv \int_{4\pi} U_n(\theta, \varphi) d\Omega = \int_{4\pi} \frac{|\underline{\mathbf{h}}(\theta, \varphi)|^2}{\text{Max}[|\underline{\mathbf{h}}(\theta, \varphi)|^2]} d\Omega = \int_{4\pi} |\underline{\mathbf{h}}_n(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$$

$$\eta_M \equiv \frac{\int_{\Omega_{ML}} U_n(\theta, \varphi) d\Omega}{\Omega_p} = \frac{\int_{\Omega_{ML}} |\underline{\mathbf{h}}_n(\theta, \varphi)|^2 d\Omega}{\Omega_p} = \frac{\Omega_M}{\Omega_p}$$

$$D(\theta, \varphi) = \frac{P_\infty(r, \theta, \varphi)}{W_T / 4\pi r^2} = \frac{U(\theta, \varphi)}{W_T / 4\pi} = \frac{4\pi U_n(\theta, \varphi)}{\int_{4\pi} U_n(\theta, \varphi) d\Omega} = \frac{4\pi |\underline{\mathbf{h}}(\theta, \varphi)|^2}{\int_{4\pi} |\underline{\mathbf{h}}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega}$$

- Inoltre la **Resistenza di radiazione** $[\Omega]$ R_r ed in generale l'**Impedenza di ingresso** dell'antenna $[\Omega]$ Z_a e la **Banda in frequenza** $[\text{Hz}]$ B sono fornite dalle seguenti:

$$Z_a(\omega) = R_a(\omega) + jX_a(\omega) = [R_r(\omega) + R_l(\omega)] + jX_a(\omega)$$

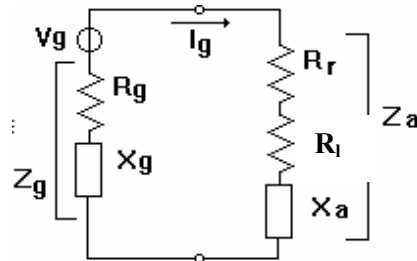
$$R_r = 2 \frac{W_T}{|I_o|^2} = 2 \frac{\int_{4\pi} U(r, \vartheta, \varphi) d\Omega}{|I_o|^2}$$

$$B = \frac{1}{2\pi} (\omega_s - \omega_i)$$

ove R_l è la **Resistenza di perdita** (per dissipazione conduttiva e dielettrica), mentre ω_s e ω_i sono le pulsazioni superiore e inferiori che definiscono i limiti di banda.

3.1.b Considerazioni energetiche sull'impedenza di antenna

- Richiamiamo il **circuito equivalente serie** a costanti concentrate per un'antenna in trasmissione:



La potenza apparente W_{IN} , fornita dal generatore, che transita attraverso la porta di ingresso dell'antenna è:

$$W_{IN} = W_{INR} + jW_{INJ} = \frac{1}{2} Z_a |I_g|^2 = \left(\frac{1}{2} R_a |I_g|^2 \right) + j \left(\frac{1}{2} X_a |I_g|^2 \right)$$

- Considerando il volume V delimitato dalla superficie S che racchiude l'antenna, si applichi il **teorema di Poynting** nel dominio della frequenza nel caso di sorgente impressa solo elettrica \underline{J}_i :

$$\oint_S \underline{P} \cdot \underline{n}_o d^2 \underline{r}' + 2j\omega \int_V (w_m - w_e) d^3 \underline{r}' + \int_V p_c d^3 \underline{r}' = \int_V p_{ei} d^3 \underline{r}'$$

che può essere riscritto in termini di **potenze** come segue:

$$W_T + 2j\omega(\mathbf{E}_m - \mathbf{E}_e) + W_l = W_{IN}$$

dove per un mezzo lineare, omogeneo, isotropo e non dispersivo si è posto:

$$W_T = \oint_S \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_o d^2 \underline{\mathbf{r}}' = \frac{1}{2} \oint_S (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}_o) d^2 \underline{\mathbf{r}}'$$

Potenza [W] irradiata attraverso S

$$E_m = \int_V w_m d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \frac{1}{4} \int_V \mu |\underline{\mathbf{H}}|^2 d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Energia magnetica [J] immagazzinata in V

$$E_e = \int_V w_e d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \frac{1}{4} \int_V \varepsilon |\underline{\mathbf{E}}|^2 d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Energia elettrica [J] immagazzinata in V

$$W_l = \int_V p_c d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\underline{\mathbf{E}}|^2 d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Potenza [W] dissipata per conduzione in V

$$W_{IN} = \int_V p_{ei} d^3 \underline{\mathbf{r}}' = -\frac{1}{2} \int_V \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Potenza [W] fornita dalle sorgenti elettriche in V

- Effettuando il **bilancio** delle parti reali e immaginarie delle potenze complesse, ovvero il bilancio delle potenze reali (pari alla potenza media temporale) e delle potenze reattive (a valore medio temporale nullo) si ha dal teorema di Poynting:

$$\begin{cases} W_{INR} = \frac{1}{2} R_a |I_g|^2 = W_T + W_l \\ W_{INJ} = \frac{1}{2} X_a |I_g|^2 = 2\omega(E_m - E_e) \end{cases}$$

da cui è possibile ricavare la **definizione di resistenza R_a e reattanza X_a d'antenna** in termini energetici:

$$\begin{cases} R_a = 2 \frac{W_T}{|I_g|^2} + 2 \frac{W_l}{|I_g|^2} \equiv R_r + R_l \\ X_a = \frac{2\omega(E_m - E_e)}{|I_g|^2} \end{cases}$$

dove R_r e R_l sono le resistenze di radiazione e di perdita.

- Da ciò deriva che nell'integrale che definisce la reattanza X_a nei punti in zona di Fraunhofer (regione di campo lontano), la funzione integranda è nulla poiché $|\underline{\mathbf{E}}| = \eta |\underline{\mathbf{H}}|$. Infatti, si ha:

$$w_e = \frac{\varepsilon |\underline{\mathbf{E}}|^2}{4} = \frac{\varepsilon \eta^2 |\underline{\mathbf{H}}|^2}{4} = \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \right)^2 \frac{\varepsilon |\underline{\mathbf{H}}|^2}{4} = \frac{\mu |\underline{\mathbf{H}}|^2}{4} = w_m \quad \Rightarrow \quad w_m - w_e = 0$$

Il precedente risultato non è più necessariamente vero in regione di campo vicino dell'antenna. Pertanto la **reattanza di antenna X_a è determinata solo dalla configurazione del campo e.m. nella regione di campo vicino** dell'antenna. Essa può essere induttiva o capacitiva a seconda che l'energia magnetica E_m sia maggiore o minore di quella elettrica E_e . Per esempio:

1. nel caso di un dipolo elettrico elementare (hertziano), in cui il campo vicino è simile a quello di un condensatore, X_a è capacitiva.
2. nel caso di una spira elementare, in cui il campo vicino è simile a quello di un induttore, X_a è induttiva.
3. nel caso si ha bilancio tra energia magnetica ed elettrica, ovvero $E_m = E_e$, X_a è nulla in corrispondenza di alcune frequenze dette di risonanza (per cui l'antenna si dice risonante).

Nota

- Nel caso di mezzi dielettrici dispersivi elettricamente, la costante dielettrica è complessa per cui:

$$E_e = E_{eR} + jE_{eJ} = \int_V w_e d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \frac{1}{4} \int_V (\varepsilon' - j\varepsilon'') |\underline{\mathbf{E}}|^2 d^3 \underline{\mathbf{r}}' \quad \text{Energia elettrica [J] immagazzinata in V}$$

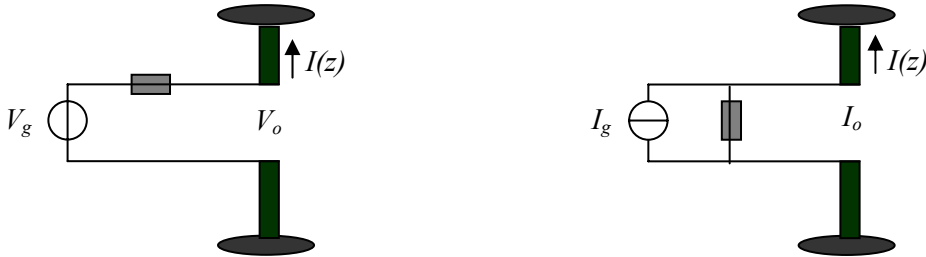
per cui:

$$\begin{cases} R_a = 2 \frac{W_T}{|I_g|^2} + 2 \frac{W_l}{|I_g|^2} + \frac{2\omega E_{eJ}}{|I_g|^2} \equiv R_r + R_{lc} + R_{ld} \equiv R_r + R_l \\ X_a = \frac{2\omega(E_m - E_{eR})}{|I_g|^2} \end{cases}$$

dove alla resistenza di perdita per conduzione R_{lc} si deve aggiungere in generale la resistenza di perdita per dispersione dielettrica R_{ld} .

3.2 DIPOLO ELETTRICO ELEMENTARE

- Il dipolo elettrico Hertziano, o dipolo elettrico elementare, è costituito da una distribuzione di corrente filiforme costante lungo un tratto lungo l , con $l \ll \lambda$.
- Esso può essere realizzato da due elementi conduttori di piccole dimensioni con due masse metalliche alle estremità, come indicato nelle figure.



- Le masse metalliche costituiscono una capacità che accumula una carica q al fine di soddisfare la condizione di solenoidalità della corrente. Infatti, per la legge di continuità della densità di corrente elettrica $\underline{\mathbf{J}}$:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = -j\omega\rho$$

per cui integrando sul volume che racchiude una singola massa metallica con densità di cariche elettriche ρ si ha:

$$I = -j\omega q$$

essendo I la corrente elettrica sul dipolo ed entrante nel volume, ovvero che scorre tra le due masse metalliche.

- Le due cariche costituiscono un dipolo di momento elettrico:

$$\underline{\mathbf{p}} = ql\underline{\mathbf{z}}_0$$

- Per definizione, il dipolo elementare (di Hertz) è tale che:

$$I(z) \cong I_o \quad |z| \leq l$$

ove I_o rappresenta il fasore (costante rispetto a z) della corrente impressa ai morsetti d'antenna. Tale ipotesi è vera se risulta $l \ll \lambda$. Una convenzionale quantificazione della relazione precedente suggerisce che: $l \leq \lambda/50$.

- Il dipolo Hertziano può essere rappresentato matematicamente da un elemento di *densità di corrente di tipo impulsivo*, sia rispetto alle coordinate trasversali che rispetto a quella longitudinale, confinato in un volume di dimensioni molto piccole rispetto alla lunghezza d'onda λ ove la corrente è costante nel tratto lungo l :

$$\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') = I_o l \delta(x) \delta(y) \delta(z) \underline{\mathbf{z}}_0$$

3.2.a Radiazione e.m. in campo lontano

Il **momento elettrico della corrente** del dipolo Hertziano si ottiene con le posizioni fatte e risulta

$$N_z(\theta) = I_o \int_{-l/2}^{l/2} e^{jkz' \cos \theta} dz' = I_o l = -j\omega q l = -j\omega \underline{p}$$

per cui si deduce che il potenziale magnetico in campo lontano (dove $r > 2l^2/\lambda$), è:

$$\underline{A}(\underline{r}) = A_z(\underline{r})\underline{z}_o = \underline{z}_o \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I_o l$$

mentre la lunghezza elettrica equivalente è:

$$\underline{h}(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{I_o} N_z(\theta) \underline{\theta}_o = l \sin \theta \underline{\theta}_o$$

Da cui, il campo elettrico a grande distanza risulta:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{j\eta I_o}{2\lambda r} e^{-jkr} \underline{h}(\theta, \varphi) = \frac{j\eta I_o}{2\lambda r} e^{-jkr} l \sin \theta \underline{\theta}_o$$

Il campo magnetico a grande distanza è dato da:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{\underline{r}_o \times \underline{E}(\underline{r})}{\eta} = |\underline{E}(\underline{r})| \frac{\underline{r}_o \times \underline{\theta}_o}{\eta} = \frac{jI_o}{2\lambda r} e^{-jkr} l \sin \theta \underline{\varphi}_o$$

In conclusione, le componenti del campo a grande distanza irradiato da un dipolo elementare sono date da:

$$\begin{cases} E_r(r, \theta, \varphi) = E_\varphi(r, \theta, \varphi) = 0 \\ E_\theta(r, \theta, \varphi) = \frac{j\eta I_o l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta \\ H_r(r, \theta, \varphi) = H_\theta(r, \theta, \varphi) = 0 \\ H_\varphi(r, \theta, \varphi) = \frac{E_\theta(r, \theta, \varphi)}{\eta} = \frac{jI_o l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta \end{cases}$$

Note

- Come già accennato, la relazione che fornisce il campo a grande distanza di una distribuzione di corrente lineare filiforme qualsiasi può essere ottenuta anche considerando l'**antenna costituita da tanti dipoli elementari** e sommando il campo dovuto a ciascun dipolo. In base alla relazione precedente, se il campo elettrico a grande distanza $\underline{E} = E_\theta \underline{\theta}_o$ di un dipolo elementare di lunghezza infinitesima $l = dz'$ vale:

$$dE_\theta(r, \theta, \varphi) = j\eta l(z') dz' \frac{e^{-jkR}}{2\lambda R} \sin \vartheta$$

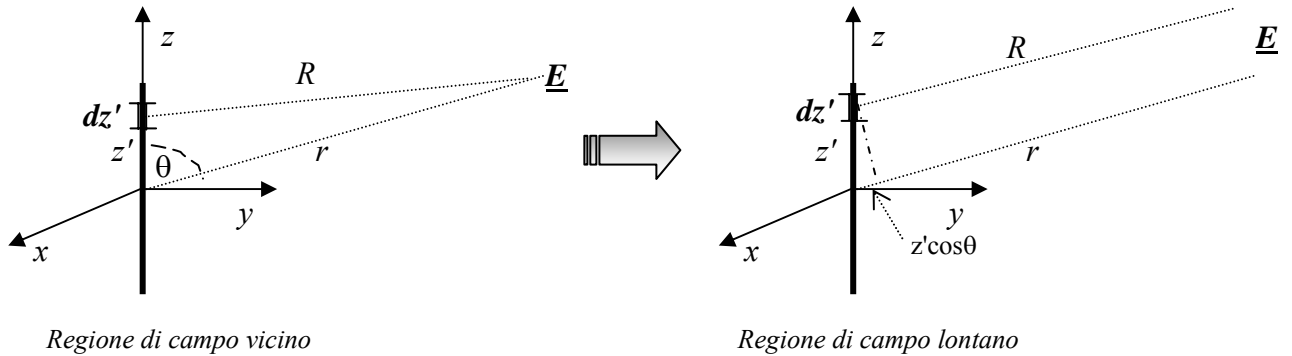
In zona di Fraunhofer (regione di campo lontano) si ha $R \approx r$ a denominatore, mentre nel termine di fase operiamo la seguente nota approssimazione vista la geometria della sorgente:

$$R^2 = r^2 + z^2 + 2rz' \cos \vartheta \approx r - z' \cos \vartheta$$

Il campo irradiato diventa pertanto l'integrale dei vari contributi infinitesimi:

$$E_{\vartheta}(r, \theta, \varphi) = \int_{-l/2}^{l/2} dE_{\vartheta}(r, \theta, \varphi) = \frac{j\eta e^{-jkr}}{2\lambda r} \sin \vartheta \int_{-l/2}^{l/2} I(z') e^{jkz' \cos \vartheta} dz'$$

che coincide con l'espressione trovata nel capitolo precedente per il campo generato da sorgenti elettriche lineari filiformi.



- **Si dimostra** che (ref. Gerosa, Lampariello, Lezioni di Campi Elettromagnetici), effettuando il calcolo del campo elettrico e magnetico dal potenziale $A_z(z)$ senza l'approssimazione di campo lontano, ovvero calcolando:

$$\underline{E} = -j\omega\mu\underline{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{A}}{j\omega\epsilon_c} = -j\omega\mu A_z(z)\underline{z}_o + \frac{\nabla\nabla \cdot A_z(z)\underline{z}_o}{j\omega\epsilon_c}$$

$$\underline{H} = \nabla \times \underline{A} = \nabla \times A_z(z)\underline{z}_o$$

si trova l'**espressione generale del campo e.m.** in cui si esplicitano termini con diversa dipendenza dalla distanza r , ovvero del tipo $1/r$ o sue potenze di ordine superiore :

$$\begin{cases} E_r(r, \theta, \varphi) = \eta \frac{I_o l \cos \theta}{2\pi r^2} \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr} \\ E_{\theta}(r, \theta, \varphi) = j\eta \frac{I_o}{2\lambda r} l \sin \theta \left[1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr} \\ E_{\varphi}(r, \theta, \varphi) = 0 \end{cases} \quad \text{Campo elettrico di un dipolo elementare}$$

$$\begin{cases} H_r(r, \theta, \varphi) = 0 \\ H_{\theta}(r, \theta, \varphi) = 0 \\ H_{\varphi}(r, \theta, \varphi) = j \frac{I_o}{2\lambda r} l \sin \theta \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr} \end{cases} \quad \text{Campo magnetico di un dipolo elementare}$$

Nel capitolo II sono state già introdotte le regioni di campo vicino reattivo, di campo vicino radiativo (zona di Fresnel) e di campo lontano (zona di Fraunhofer). Per antenne di dimensioni finite (dimensioni massime D), abbiamo distinto le due ultime regioni analizzando il termine di **fase della funzione di Green**. In quel contesto, il modulo della funzione di Green è stato approssimato con $1/r$ sia in zona di Fresnel che di Fraunhofer.

Le espressioni generali del campo e.m. del dipolo elementare permettono di mettere in evidenza anche la diversa dipendenza di **modulo e direzione del campo elettrico e magnetico** nelle diverse regioni dello spazio.

A seconda della distanza r , o meglio kr , dal dipolo Hertziano si possono distinguere le 3 seguenti regioni di campo nell'ipotesi di mezzo lineare, omogeneo, isotropo e non dispersivo.

1. **Regione di campo quasi statico o campo vicino reattivo** ($kr \ll 1$): in prossimità del dipolo prevalgono termini proporzionali a $1/r^3$ per \underline{E} e $1/r^2$ per \underline{H} . I campi \underline{E} e \underline{H} relativi a tali termini sono in quadratura per cui non contribuiscono al flusso medio (in un periodo temporale) di potenza irradiata (potenza attiva); per variazioni cosinusoidali, il vettore di Poynting associato a tali termini è puramente immaginario. La configurazione di tali termini del campo e.m. è quella generata da un elemento di corrente costante nel tempo (caso statico).
2. **Regione di campo intermedia** ($kr > 1$): a distanza intermedia prevalgono termini in cui è presente $1/r$ e $1/r^2$ per \underline{E} e $1/r$ per \underline{H} . Inoltre, il fatto che le componenti trasverse (alla direzione radiale) di \underline{E} e \underline{H} di tali termini siano in fase indica anche che ad essi è associato un flusso (radiale) di potenza attiva, ovvero potenza media irradiata dall'antenna.
3. **Regione di Fraunhofer o di campo lontano radiativo** ($kr \gg 1$): a grande distanza rimangono solo i termini di \underline{E} e \underline{H} che variano come $1/r$. I campi \underline{E} e \underline{H} sono trasversi alla direzione radiale e in fase. Ciò indica che il vettore di Poynting è puramente reale e tutta la potenza è irradiata nella direzione radiale.

3.2.b Parametri del dipolo elettrico elementare

- E' possibile calcolare i parametri radiativi del dipolo Hertziano specializzando le relazioni riportate nei paragrafi precedenti. La **lunghezza elettrica equivalente** è data da:

$$\underline{h}(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{I_o} N_z(\theta) \underline{\theta}_o = l \sin \theta \underline{\theta}_o$$

- Il **vettore di Poynting** in campo lontano è reale e diretto radialmente:

$$\underline{P}_\infty(r, \vartheta, \varphi) = P_\infty(r, \vartheta, \varphi) \underline{r}_o = \frac{1}{2\eta} |E_\theta|^2 \underline{r}_o = \frac{\eta I_o^2}{8r^2} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \sin^2 \vartheta \underline{r}_o$$

- La **potenza trasmessa** W_T (o irradiata) si calcola integrando $P_\infty(r, \theta, \varphi)$ su una sfera di raggio r :

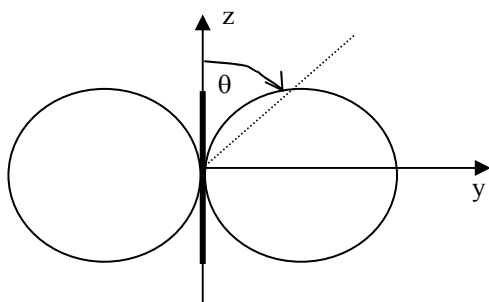
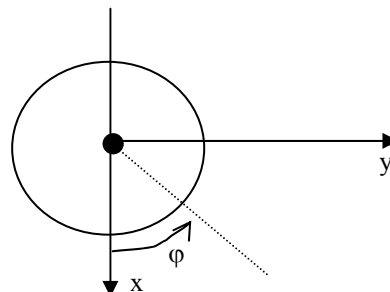
$$W_T = \iint_{4\pi} P_\infty(r, \vartheta, \varphi) r^2 d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\eta I_o^2}{8r^2} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \sin^2 \vartheta r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{\eta I_o^2}{8} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi = \eta \frac{\pi}{3} I_o^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

essendo $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{8\pi}{3}$.

- Il massimo di $\underline{h}(\vartheta, \varphi)$ si ha per $\vartheta = \pi/2$, π , per cui il solido di radiazione normalizzato o diagramma di radiazione normalizzato o **intensità di radiazione normalizzata** U_n è dato da:

$$U_n(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{U(0,0)} = \frac{|\underline{h}(\theta, \varphi)|^2}{\text{Max}[|\underline{h}(\theta, \varphi)|^2]} = \sin^2 \theta$$

Esso è simmetrico rispetto a z su un piano $\varphi=\text{costante}$ e nullo per $\vartheta=0$. Nello spazio è rappresentato da un toroide (“ciambella”) con asse coincidente con quello del dipolo stesso. I piani principali di U_n in coordinate polari sono di seguito rappresentati.

Sezione di U_n per $\varphi=0^\circ$ (o costante)Sezione di U_n per $\theta=90^\circ$ (o costante)

- La **larghezza del fascio a metà potenza** (HPBW) si ottiene da:

$$\Theta_{3dB} = 2\theta_{3dB} \quad \text{tale che} \quad U_n(\theta_{3dB}) = \sin^2 \theta_{3dB} = \frac{1}{2}$$

da cui:

$$\theta_{3dB} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \Theta_{3dB} = 90^\circ.$$

- La **direttività** $D(\theta, \varphi)$ ed il suo valore massimo D_M si ricavano dalle rispettive definizioni:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{P_\infty(r, \theta, \varphi) 4\pi^2}{W_T} = 4\pi \frac{U(\theta, \varphi)}{W_T} = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta$$

il cui valore massimo è: $D_M = D(\theta, \varphi)|_{\max} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad D_M = 1.76 \text{ dB}$

- L'**angolo solido di radiazione** è dato da:

$$\Omega_P = \frac{4\pi}{D_M} = 4\pi \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\pi = 120^\circ$$

- Supponendo $\eta=377 \Omega$ (mezzo vuoto), per la **resistenza di radiazione** R_r si ricava dalla definizione:

$$R_r = 2 \frac{W_T}{I_o^2} = \eta \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \cong 377 \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \cong 790 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

- L'**area equivalente** si ricava dall'espressione della lunghezza equivalente. Nel caso di assenza di perdite ($R_l=0$, $R_a=R_r$), risulta per i valori massimi:

$$A_{eM} = h_M^2 \frac{\eta}{4R_a} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2$$

Note

- L'**efficienza di radiazione** η_r , definita da: $\eta_r = R_r / (R_r + R_l)$, è tanto maggiore quanto più il dipolo è lungo, anche se quando l approssima λ non sono più valide le ipotesi poste alla base della trattazione del dipolo di Hertz ($l \ll \lambda$).
- E' possibile anche calcolare la **reattanza** X_a dell'impedenza d'antenna Z_a , usando l'espressione completa del campo, illustrata precedentemente, che include i termini del campo vicino al dipolo.
- Si noti che l'area equivalente è indipendente dalla lunghezza, al contrario della resistenza di radiazione.

- La **banda di frequenza** di un dipolo elettrico elementare tale che $l \ll \lambda/50$ e di sezione infinitesima (in pratica, $\lambda/d < 5000$ con d diametro della sezione), risulta molto stretta. Si ottengono per la banda frazionale $B_{\%}$ valori dell'ordine di:

$$B_{\%} = \frac{f_s - f_i}{f_c} \leq 3\%$$

dove f_s, f_i e f_c sono la frequenza superiore, inferiore e centrale di banda.

3.2.c Relazione tra area equivalente e direttività: caso particolare

- Abbiamo dimostrato che per un dipolo elettrico elementare, i principali parametri di antenna sono dati da:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta$$

$$R_r = \eta \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

$$h(\theta, \varphi) = l \sin \theta$$

- L'ultima relazione esprime implicitamente la reciprocità tra antenna in trasmissione e in ricezione. Utilizziamo anche il risultato seguente, ottenuto nel capitolo I e già richiamato:

$$A_e(\theta, \varphi) = h^2(\theta, \varphi) \frac{\eta}{4R_a}$$

- Considerando, per semplicità, il caso di assenza di perdite ($R_i=0$, $R_a=R_r$), sostituendo si ha:

$$A_e(\theta, \varphi) = l^2 \sin^2 \theta \frac{1}{4} \left(\frac{3\lambda^2}{\eta l^2 2\pi} \right) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta \right)$$

e, quindi ritroviamo la relazione già nota tra area equivalente e direttività.

$$A_e(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \varphi)$$

Come già sottolineato, il precedente legame è valido in realtà per ogni antenna e discende direttamente dal teorema di reciprocità.

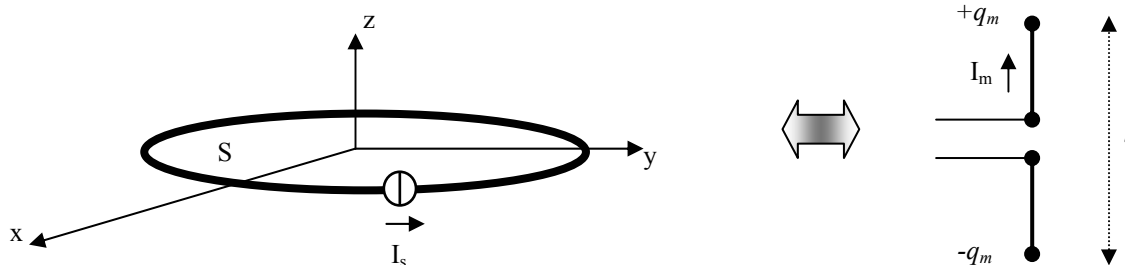
3.3 SPIRA ELEMENTARE DI CORRENTE O DIPOLO MAGNETICO

- Una **spira piana elementare** di sezione S , che per semplicità supporremo giacere nel piano xy , è una spira di dimensione piccole rispetto alla lunghezza d'onda λ (corrispondente alla pulsazione ω della corrente) percorsa da una corrente impressa I_s (fasore). Essa può essere descritta attraverso il suo momento di dipolo magnetico $\underline{\mathbf{m}}_m$:

$$\underline{\mathbf{m}}_m = m_m \underline{\mathbf{z}}_0 = \mu I_s S \underline{\mathbf{z}}_0 \quad [\text{HAm}]$$

dove $\underline{\mathbf{z}}_0$ è il versore normale al piano della spira.

- Essa può essere realizzata da un anello filiforme di conduttore alimentato ad una sezione. La forma della spira (circolare, rettangolare, etc.) può essere qualunque nel caso di dimensioni infinitesime, ovvero di spira elementare.



3.3.a Equivalenza tra spira e dipolo magnetico

- Per dualità rispetto alla definizione di dipolo elettrico elementare (dipolo di Hertz) si introduce il **dipolo magnetico elementare**. Sebbene correnti magnetiche non esistano fisicamente, esse vengono introdotte nei problemi e.m. a seguito dell'applicazione dei teoremi di equivalenza o induzione.
- Il dipolo magnetico elementare si definisce come un elemento di corrente magnetica costante che scorre tra una coppia di cariche magnetiche opposte di valore q_m poste a distanza l (con $l \ll \lambda$). Il suo momento magnetico $\underline{\mathbf{m}}_m$ vale per dualità rispetto a quello del dipolo elettrico $\underline{\mathbf{p}}$ (i.e., $\underline{\mathbf{p}} = q \underline{\mathbf{l}}$):

$$\underline{\mathbf{m}}_m = m_m \underline{\mathbf{z}}_0 = q_m l \underline{\mathbf{z}}_0 \quad [\text{Wb m}] \quad [\text{HAm}]$$

Inoltre, dalla legge di continuità della densità di corrente magnetica $\underline{\mathbf{J}}_m$, si ha:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_m = -j\omega\rho_m$$

per cui integrando sul volume (in cui I_m è entrante) che racchiude le densità di cariche magnetiche $+\rho_m$, si ha:

$$-I_m = -j\omega q_m$$

essendo I_m la corrente magnetica che attraversa il dipolo magnetico.

- Si dimostra** che il **campo e.m.** generato da una **spira elementare** di corrente di momento magnetico $\underline{\mathbf{m}}_m$ è identico a quello generato da un dipolo magnetico elementare avente lo stesso momento magnetico $\underline{\mathbf{m}}_m$. La dimostrazione si basa sulla determinazione del potenziale vettore e quindi del campo nelle ipotesi fatte circa le dimensioni della spira. Si può sviluppare nei casi particolari di spira circolare o quadrata ma comporta comunque una certa laboriosità dal punto di vista matematico e viene pertanto omessa.

- Dal confronto tra l'espressione del momento magnetico del dipolo magnetico elementare e quello della spira elementare (dato all'inizio del paragrafo), l'equivalenza tra i due richiede che sussista:

$$\mu I_s S = q_m l \quad [\text{A m}^2]$$

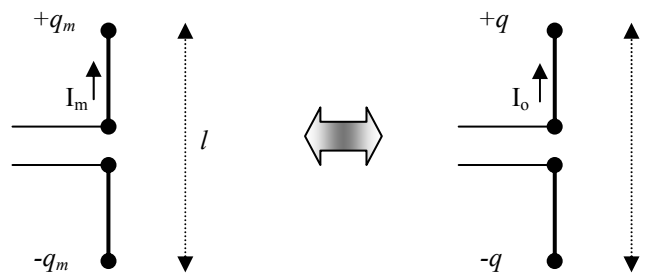
da cui la seguente fondamentale uguaglianza:

$$I_m l = j\omega q_m l = j\omega \mu I_s S$$

che descrive l'**equivalenza tra il dipolo magnetico elementare e la spira di corrente elementare** (ovvero, entrambi di piccole dimensioni rispetto a λ).

➤ Campo e.m. a grande distanza irradiato da una spira elementare di corrente

- Il dipolo magnetico elementare di lunghezza l e percorso da corrente magnetica I_m è, come detto, la **struttura duale** del dipolo elettrico elementare di lunghezza l e percorso da corrente elettrica I_o .



- Il **campo e.m. a grande distanza generato da una spira elementare di corrente** può essere ottenuto, quindi, applicando il principio di dualità alle espressioni del campo e.m. del dipolo elettrico elementare, effettuando le seguenti sostituzioni:

◆ $I_o l$	in	$I_m l$
◆ $\underline{\mathbf{E}}$	in	$\underline{\mathbf{H}}$
◆ $\underline{\mathbf{H}}$	in	$-\underline{\mathbf{E}}$
◆ k	in	k
◆ η	in	$1/\eta$

- Si ottengono le seguenti espressioni per il **campo e.m. generato da una spira elementare** con corrente elettrica I_s e sezione S (**dipolo magnetico elementare** di corrente magnetica I_m e lunghezza l) in zona di Fraunhofer:

$$\begin{cases} E_r(r, \theta, \varphi) = E_\theta(r, \theta, \varphi) = 0 \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi) = \frac{-j I_m l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta \\ H_r(r, \theta, \varphi) = H_\theta(r, \theta, \varphi) = 0 \\ H_\varphi(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{\eta} E_\varphi(r, \theta, \varphi) = \frac{j I_m l}{2\lambda r \eta} e^{-jkr} \sin \theta \end{cases}$$

Note

- La **realizzazione pratica** di un dipolo magnetico può ottenersi immaginando diverse spire uguali e coassiali disposte in modo da inviluppare un piccolo cilindro o **solenoid**. Se le spire sono vicine, si potrà approssimare l'insieme delle

spire con una corrente laminare elettrica distribuita uniformemente e diretta tangenzialmente rispetto a ciascuna sezione del cilindro, considerando come corrente del solenoide la somma delle correnti che scorrono in ogni spira.

- Una qualsiasi antenna può essere rappresentata da un **dipolo elettrico o magnetico equivalente** ovvero una combinazione dei due.
- La **sorgente di Huygens** è un'antenna composita che può essere ricondotta alla connessione di un dipolo magnetico (spira o solenoide) con un dipolo elettrico, con assi mutuamente ortogonali e alimentazione tale che i due momenti (elettrico e magnetico) oscillino in fase e il loro rapporto sia pari a η . Il principio di **Huygens** afferma che ogni punto di un fronte d'onda di una radiazione e.m. può essere considerato sorgente di ulteriori fronti d'onda, il cui involuppo permette di ricostruire il fronte d'onda che si propaga. In altre parole, il campo e.m. in un punto può sempre essere determinato da una opportuna distribuzione di sorgenti (le sorgenti di **Huygens**) poste su una superficie come già affermato dal teorema di equivalenza dimostrato nel capitolo 2.

3.3.b Parametri d'antenna della spira elementare di corrente

➤ Lunghezza magnetica equivalente di un dipolo magnetico elementare

- Per il dipolo magnetico elementare, dualmente rispetto a quello elettrico, la **lunghezza magnetica equivalente** è fornita da:

$$\underline{h}_m(\theta, \varphi) = \sin\theta \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_m(z')}{I_o} e^{jkz'\cos\theta} dz' \underline{\theta}_o = \frac{\sin\theta}{I_o} M_z(\theta) \underline{\theta}_o = l \sin\theta \underline{\theta}_o \quad [\text{m}]$$

Quindi, per $\theta=\pi/2$ si ha $h_{mM}=l$. Nella formula I_m è la corrente magnetica sull'antenna, mentre M_z è il **momento magnetico della corrente** dell'antenna (duale del momento elettrico della corrente):

$$M_z(\theta) = \int_{-l/2}^{l/2} I_m(z') e^{jkz'\cos\theta} dz'$$

- I **parametri d'antenna della spira elementare di corrente (dipolo magnetico elementare)** sono direttamente ricavabili da quelli ottenuti per il dipolo elettrico elementare ponendo \underline{h}_m al posto di \underline{h} .

➤ Legame tra lunghezza elettrica e magnetica equivalente

- Per un'antenna in ricezione, nelle condizioni di efficienza unitaria di polarizzazione e di incidenza nella direzione di massima ricezione, abbiamo ricavato:

$$\begin{cases} V_{aM} = h_M |\underline{E}_i| \\ I_{aM} = h_{mM} |\underline{H}_i| \end{cases}$$

dove V_{aM} e I_{aM} sono i valori massimi della tensione a vuoto e della corrente di corto circuito dell'antenna in ricezione vista come bipolo attivo, ovvero come generatore di tensione in un circuito equivalente serie o come generatore di corrente in un circuito equivalente parallelo.

- Per definizione, l'**impedenza di antenna** Z_a è esprimibile come

$$Z_a \equiv \frac{V_{aM}}{I_{aM}} \quad [\Omega]$$

da cui, essendo a grande distanza $E_i/H_i=\eta$:

$$Z_a = \frac{V_{aM}}{I_{aM}} = \frac{h_M |\underline{E}_i|}{h_{mM} |\underline{H}_i|} = \frac{h_M}{h_{mM}} \eta \quad \text{ovvero:} \quad \frac{h_M}{h_{mM}} = \frac{Z_a}{\eta}$$

- Rispetto alla lunghezza elettrica equivalente, per cui abbiamo dimostrato:

$$A_{eM} = h_M^2 \frac{\eta}{4R_a}$$

per dualità, si ottiene per la lunghezza magnetica equivalente:

$$A_{eM} = h_{mM}^2 \frac{1}{4G_a \eta}$$

dove $R_a = 1/G_a$ è la resistenza di antenna avendo rappresentato l'antenna in ricezione mediante un circuito equivalente parallelo con ammettenza $Y_a = G_a + jB_a$.

- Se l'impedenza di antenna è reale, ovvero tale che $R_a = G_a$ e $X_a = B_a = 0$, si ricava facilmente il seguente legame tra parametri che descrivono le proprietà dell'antenna in ricezione:

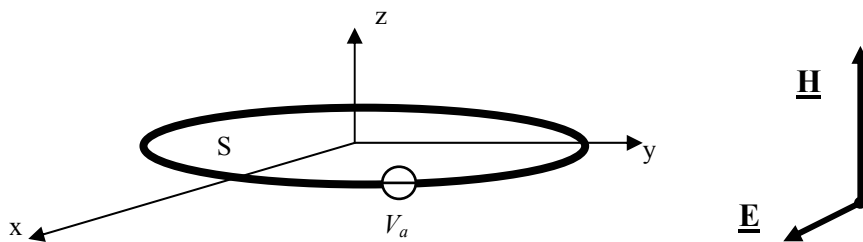
$$A_{eM} = h_{mM}^2 \frac{1}{4\eta} R_a = h_{mM}^2 \frac{1}{4\eta} \left(h_M^2 \frac{\eta}{4A_{eM}} \right) \Rightarrow 4A_{eM} = h_M h_{mM}$$

Nota

- Le precedenti relazioni sono, ovviamente, estendibili al caso di antenna con perdite ed efficienza di antenna e di polarizzazione non unitarie.
- Le denominazioni di lunghezza elettrica h e magnetica h_m equivalenti di una generica antenna stanno ad indicare che h e h_m sono le lunghezze che dovrebbero avere un ipotetico dipolo elettrico elementare o dipolo magnetico elementare (ovvero una spira di corrente elettrica elementare) affinché siano equivalenti all'antenna in esame dal punto di vista del circuito in ricezione.

➤ Lunghezza elettrica di una spira elementare in funzione dell'area geometrica

- Tale legame si può ricavare in modo semplice mediante la I eq. di Maxwell o legge di induzione. Si supponga che incida su una spira elementare un'onda piana uniforme polarizzata linearmente in modo che il campo \underline{H} sia diretto come l'asse (\underline{z}_0) della spira (i.e., efficienza di polarizzazione unitaria).



In assenza di correnti impresse e nel caso di spira elementare di superficie S , l'unico **flusso magnetico concatenato** Φ è quello del campo induzione magnetica $\underline{\mathbf{B}}$, relativo all'onda incidente, che è pari a:

$$\Phi(\underline{\mathbf{B}}) = \int_S \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS = \int_S \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{z}}_0 dS \cong BS = \mu HS$$

Ma dalla I eq. di Maxwell in forma integrale, si ha:

$$\oint_S \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{s}}_0 ds = -j\omega \int_S \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS \Rightarrow V_{fem} = -j\omega\Phi(\underline{\mathbf{B}}) \Rightarrow V_a = j\omega\mu HS$$

dove $\underline{\mathbf{s}}_0$ è il versore tangente alla spira, V_{fem} è la forza elettromotrice indotta uguale e opposta alla tensione V_a a vuoto della spira in ricezione.

□ Considerando che per l'onda piana uniforme in mezzi privi di perdite (per semplicità) si ha:

$$\frac{E}{H} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

si può scrivere, moltiplicando e dividendo per E :

$$V_a = j\omega\mu ES \frac{H}{E} = j\omega\mu ES \frac{1}{\eta} = j \frac{\omega\mu}{\eta} SE = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} SE = jkSE$$

Per confronto con la definizione di **lunghezza elettrica equivalente** in condizioni di massima ricezione ed efficienza di polarizzazione unitaria:

$$V_a = h_M E$$

si ottiene il risultato cercato:

$$h_M = jkS$$

facilmente estendibile al caso di incidenza obliqua.