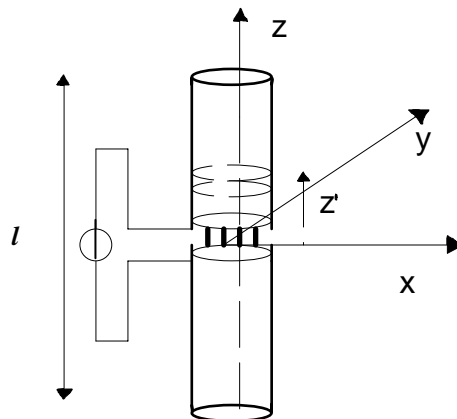


### 3.4 EQUAZIONE INTEGRALE DI HALLEN PER DIPOLI CILINDRICI

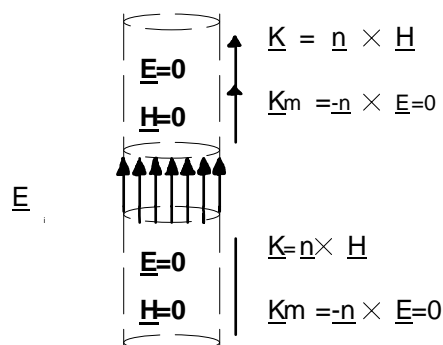
- In precedenza abbiamo considerato distribuzioni di corrente impressa filiformi, ovvero di *sezione infinitesima*. Tuttavia, quest'ultima ipotesi è in molte circostanze inadeguata.
- Le antenne lineari sottili sono costituite da un insieme di due **conduttori cilindrici** complessivamente lunghi  $l$  con dimensioni trasversali piccole, ma finite, rispetto a quelle longitudinali, percorsi da corrente in quanto alimentati da un generatore applicato ai due morsetti di ingresso.



- L'ipotesi di distribuzione di **corrente filiforme** è solitamente valida per ricavare il campo a grande distanza, mentre è inaccurata per la determinazione dell'impedenza di ingresso. Quest'ultima è legata significativamente alla distribuzione di corrente  $I(z)$  che dipende dal tipo di alimentazione e dalla geometria dell'antenna e, in particolare, dal suo spessore.
- La determinazione di  $I(z)$  richiede la soluzione di un'equazione integrale nell'incognita  $I(z)$  detta **equazione integrale di Hallen**.

#### 3.4.a Problema equivalente mediante teorema di induzione

- Se il conduttore cilindrico è un **conduttore elettrico perfetto** (CEP) il campo all'interno è nullo e le correnti sono confinate sulla superficie. Il generatore determina una tensione  $V_0$  tra i conduttori e, quindi, un campo elettrico  $\underline{E}_i$  (campo incidente, indipendente dalla geometria dei conduttori) uniforme confinato nel taglio ("gap") tra i due conduttori.



- Applicando il **teorema di induzione** sulla superficie dei conduttori si devono considerare le opportune distribuzioni di correnti superficiali che assicurano campo interno nullo anche quando si sostituisce al conduttore un mezzo uguale

a quello esterno. Si ottiene il **problema equivalente** di figura in cui vengono introdotte le seguenti densità di corrente superficiali indotte:

$$\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{H}}$$

$$\underline{\mathbf{k}}_m = -\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{E}} = 0$$

- Sostituendo al conduttore il mezzo all'esterno, tali correnti irradiano in un mezzo omogeneo. Pertanto, il potenziale vettore  $\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}})$  del campo irradiato in un punto qualunque interno o esterno alla superficie cilindrica è fornito dalla teoria dei **potenziali elettrodinamici**:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{J}}$$

la cui soluzione, se  $V$  è il volume dove è definita la sorgente impressa  $\underline{\mathbf{J}}$ , è:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

- Il problema si trasferisce a quello di dover determinare le correnti  $\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}})$ . Considerando che si tratta di **correnti superficiali** localizzate sulla superficie di un cilindro di raggio  $a$ , possiamo esprimere  $\underline{\mathbf{r}}'$  in coordinate cilindriche  $(\rho', \phi', z')$ . Se  $\delta(\rho')$  è la funzione impulsiva di Dirac e tenendo conto della simmetria azimutale del problema, si può scrivere la densità di corrente nel seguente modo:

$$\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') = J_z(\rho', z') \underline{\mathbf{z}}_0 = \underline{\mathbf{k}}(z') \delta(\rho' - a),$$

La corrente  $I(z')$  si calcola come flusso della  $\underline{\mathbf{J}}$  attraverso la sezione del conduttore, che a causa del cosiddetto effetto “pelle” (vedi cap. I) si riduce a una circonferenza di perimetro  $2\pi a$  e vale:

$$I(z') = \int_S \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \underline{\mathbf{z}}_0 d^2 \underline{\mathbf{r}}' = \int_S \underline{\mathbf{k}}(z') \cdot \underline{\mathbf{z}}_0 \delta(\rho' - a) d^2 \underline{\mathbf{r}}' = k_z(z') \int_0^{2\pi} \int_0^a \delta(\rho' - a) \rho' d\rho' d\phi' = k_z(z') 2\pi a$$

dove  $d^2 \underline{\mathbf{r}}' = \rho' d\rho' d\phi'$  in coordinate cilindriche.

- Dall'espressione della soluzione per  $\underline{\mathbf{A}}$ , è chiaro che essendo  $\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}) = J_z(\rho', z') \underline{\mathbf{z}}_0$ , risulta:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{A}}(x, y, z) = A_z(x, y, z) \underline{\mathbf{z}}_0$$

ovvero il potenziale  $\underline{\mathbf{A}}$  è diretto lungo  $z$ .

### 3.4.b Deduzione dell'equazione integrale di Hallen

- Ricaviamo nel seguito una equazione (eq. di Hallen) per la distribuzione della corrente lungo il conduttore ed una sua soluzione approssimata. Per non appesantire la trattazione, verrà esposta una **formulazione semplificata**.
- Ritorniamo alla struttura equivalente di un'antenna lineare, considerando la teoria dei potenziali elettrodinamici. Nei **punti interni al volume** occupato dal conduttore cilindrico ( $x^2 + y^2 \leq a^2$ ), il campo elettrico è nullo (escludendo, ovviamente, i punti all'interno del *taglio*). Quindi, si deduce che:

$$\underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{A}} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}}{j\omega\epsilon_c} = 0 \quad \text{per } |z| \leq l/2, z \neq 0$$

Essendo  $\underline{\mathbf{A}}(x,y,z)=A_z(x,y,z) \underline{\mathbf{z}}_0$ , si ottiene in coordinate cartesiane:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}$$

per cui, sostituendo:

$$-j\omega\mu\underline{\mathbf{A}} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}}{j\omega\epsilon_c} = -j\omega\mu A_z(x,y,z)\underline{\mathbf{z}}_0 + \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \left( \frac{\partial}{\partial x} \underline{\mathbf{x}}_0 + \frac{\partial}{\partial y} \underline{\mathbf{y}}_0 + \frac{\partial}{\partial z} \underline{\mathbf{z}}_0 \right) \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z} = 0$$

Eguagliando ciascuna componente a zero, si deduce che:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z} = 0$$

e inoltre:

$$-j\omega\mu A_z(x,y,z) + \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{\partial^2 A_z(x,y,z)}{\partial z^2} = 0 \quad \text{per } |z| \leq l/2, z \neq 0$$

Quindi, poiché le variazioni di  $A_z(x,y,z)$  rispetto a  $x$  e  $y$  risultano nulle ed essendo  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c$ , si può trasformare la precedente introducendo la derivata totale:

$$\frac{d^2 A_z(z)}{dz^2} + k^2 A_z(z) = 0 \quad \text{per } |z| \leq l/2, z \neq 0$$

- Il potenziale  $A_z$  verifica pertanto un'equazione di Helmholtz omogenea, la cui **soluzione generale** nei punti interni ed esterni alla regione occupata dal conduttore (escluso pertanto il *taglio*) è del tipo:

$$A_z(z) = A^+ e^{-jkz} + A^- e^{+jkz} \quad \text{per } |z| \leq l/2, z \neq 0$$

- D'altra parte, il potenziale vettore calcolato nei punti interni al volume occupato dal conduttore è esprimibile in **forma integrale** in funzione delle correnti superficiali indotte.

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Esprimendo  $\underline{\mathbf{J}}$  attraverso le correnti superficiali  $\underline{\mathbf{k}}$  lungo  $z$  come mostrato in precedenza e **considerando punti di osservazione sull'asse  $z$**  (i.e.,  $x=y=0$ ), si ottiene per  $A_z(z)$ :

$$A_z(z) = \int_V J_z(z') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a k_z(z') \delta(\rho' - a) \frac{e^{-jk|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'|}}{4\pi |\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'|} \rho' d\rho' d\phi' dz' \quad \text{per } z \neq 0$$

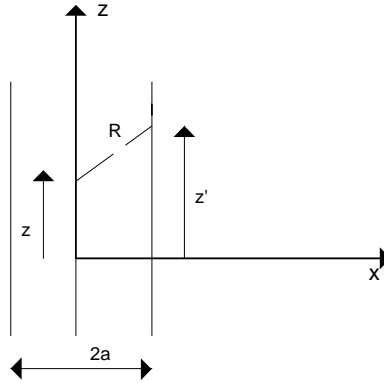
Inoltre, con  $x=y=0$ ,  $|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + (z - z')^2} = \sqrt{\rho'^2 + (z - z')^2}$  e si ottiene la seguente:

$$A_z(z) = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a k_z(z') \delta(\rho' - a) \frac{e^{-jk\sqrt{\rho'^2 + (z - z')^2}}}{4\pi \sqrt{\rho'^2 + (z - z')^2}} \rho' d\rho' d\phi' dz'$$

Per la proprietà di campionamento dell'impulso di Dirac  $\delta$ , si ottiene:

$$A_z(z) = 2\pi a \int_{-l/2}^{l/2} k_z(z') \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(z-z')^2}} dz' = \int_{-l/2}^{l/2} I(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz'$$

dove, come noto,  $I(z) = 2\pi a k_z(z)$  ed  $R$  è dato da:  $R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$ .



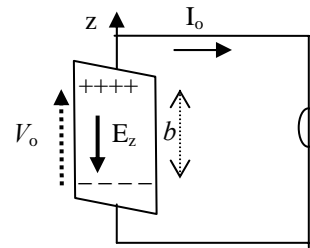
- Eguagliando le due espressioni ricavate per  $A_z$  si ottiene l'**equazione integrale di Hallen** la cui incognita è la corrente  $I(z)$  sull'antenna:

$$\int_{-l/2}^{l/2} I(z') \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(z-z')^2}} dz' = A^+ e^{-jkz} + A^- e^{jkz} \quad \text{per } z \neq 0, |z| \leq l$$

#### Note

- E' possibile estendere l'eq. di Hallen ricavata anche per  $z=0$ , includendo la **condizione al contorno fornita dal generatore** di corrente  $I_0$ , ovvero di tensione  $V_0$  ai morsetti dell'antenna. Se il *taglio* ha dimensione longitudinale  $b$ , il potenziale  $V_0 = V(z=0)$  ai morsetti dell'antenna è pari al lavoro compiuto contro il campo elettrico  $E_z$  indotto sul *taglio*

$$V_0 = - \int_{-b/2}^{b/2} E_z(x, y, z) dz \cong -E_z b$$



In altri termini,  $E_z$  è tale da annullare la componente tangenziale del campo elettrico totale (ovvero la somma del campo impresso dal generatore e di quello indotto). Se  $b \rightarrow 0$ , il modello di eccitazione si riduce al cosiddetto delta-taglio ("delta-gap") tale che:

$$E_z = -V_0 \delta(z)$$

Considerando l'espressione della componente lungo  $z$  del campo elettrico  $\underline{E}$  mediante l'equazione già ricavata attraverso il potenziale elettrodinamico  $\underline{A}$ , ovvero:

$$E_z = -j\omega\mu A_z(z) + \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{d^2 A_z(z)}{dz^2} \quad \text{per } |z| \leq l/2$$

e sostituendo, si ricava l'equazione non omogenea cercata:

$$\frac{d^2 A_z(z)}{dz^2} + k^2 A_z(z) = j\omega\epsilon_c E_z = -j\omega\epsilon_c V_o \delta(z) \quad \text{per } |z| \leq l/2$$

**Si dimostra** che la soluzione della precedente equazione è data da:

$$A_z(z) = A_1 \sin(k|z|) + A_2 \cos(kz) \quad \text{per } |z| \leq l/2$$

con

$$A_1 = \frac{1}{2j} \eta V_o$$

ricavata considerando che l'antenna è simmetrica rispetto a  $z=0$  e che deve valere la continuità della soluzione  $A_z$  e della sua derivata prima calcolata nell'intorno di  $z=0$ . La costante  $A_2$  è incognita e viene determinata dal tipo di terminazione del dipolo.

- Un'equazione alternativa a quella di Hallen è l'**equazione integro-differenziale di Pocklington** (ricavata nel 1897). Rispetto a quella di Hallen, l'eq. di Pocklington è meno adatta per il calcolo della distribuzione di corrente, ma più versatile nell'uso di modelli di eccitazione diversi dal delta-taglio.

### 3.4.c Soluzione approssimata dell'equazione integrale di Hallen

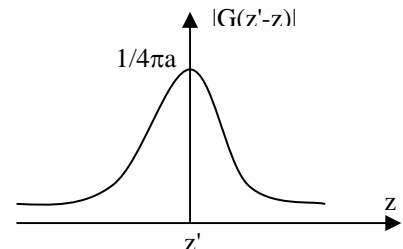
- La soluzione approssimata si ottiene considerando l'andamento del **modulo della funzione di Green**

$$G(R) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(z-z')^2}} = G(z-z')$$

al variare di  $z'$ . La funzione  $G$  è massima in  $z=z'$  e decresce rapidamente per valori di  $z$  maggiori e minori, tanto più rapidamente quanto più il raggio è piccolo, come espresso dalla figura. Si noti che le variazioni della fase di  $G(R)$  rispetto a  $z$  sono molto inferiori a quelle del modulo e, quindi, trascurabili nell'ambito di questa approssimazione.

Pertanto per **antenne sottili** (di sezione  $a$  molto piccola rispetto a  $\lambda$ ), si ha:

$$A_z(z) = \int_{-l/2}^{l/2} I(z') G(R) dz' = \int_{-l/2}^{l/2} I(z') G(z-z') dz' \cong I(z) \int_{-l/2}^{l/2} G(z-z') dz'$$



Ciò significa che  $A_z(z)$  ad una distanza longitudinale  $z$  è prevalentemente determinato dalle correnti  $I(z)$  che scorrono alla medesima  $z$ . Tale approssimazione di antenna sottile è tanto più verificata se:

- il dipolo è sufficientemente sottile, ovvero, introducendo il **parametro di snellezza**  $w_d$  del dipolo, deve risultare:

$$w_d = 2 \ln\left(\frac{l}{a}\right) > 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{a} > 150$$

- risulta  $I(z) \neq 0$ , in quanto se fosse  $I(z) \equiv 0$  nell'integrale evidentemente non si potrebbero più trascurare i contributi della corrente a distanze diverse da  $z$ .

- Nell'approssimazione per dipolo sottili, la **soluzione approssimata dell'equazione integrale di Hallen** è:

$$I(z) \cong I^+ e^{-jkz} + I^- e^{+jkz} \quad \text{per } |z| \leq l/2$$

dove le costanti  $I^+$  e  $I^-$  sono a rigore funzioni delle dimensioni trasverse del dipolo e della distanza  $z$ :

$$I^+ = \frac{A^+}{C(a,z)}; \quad I^- = \frac{A^-}{C(a,z)}; \quad C(a,z) = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(z-z')^2}} dz'$$

### 3.4.d Analogia tra antenna lineare sottile e linea di trasmissione

- Notiamo che la **soluzione approssimata dell'equazione integrale di Hallen** è anche soluzione dell'equazione differenziale della corrente nella teoria delle **linee di trasmissione**. Infatti, nell'ipotesi di linea diretta lungo  $z$  e in assenza di generatori, la cosiddetta *eq. dei telegrafisti* conduce a:

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} + k^2 I(z) = 0$$

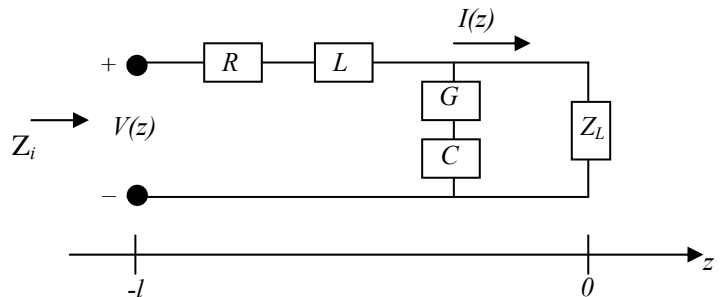
la cui soluzione è data da:

$$I(z) = I^+ e^{-jkz} + I^- e^{+jkz}$$

dove si ha:

$$k^2 = Z_s Y_p \quad \text{con} \quad \begin{cases} Z_s = R + j\omega L \\ Y_p = G + j\omega C \end{cases}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}}$$



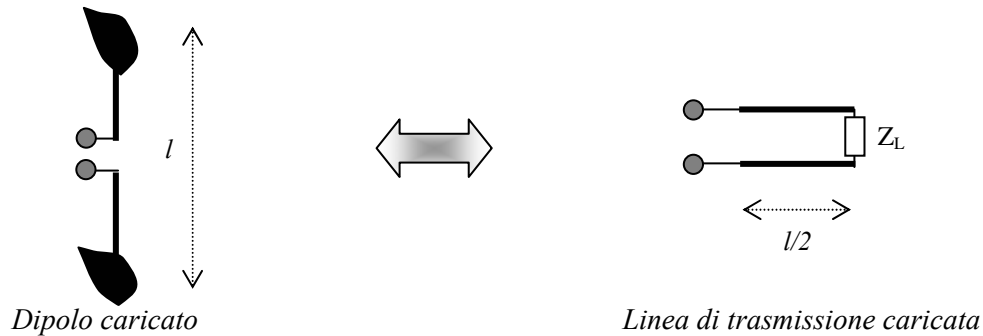
essendo  $k$  la costante di propagazione (lungo  $z$ ),  $Z_0$  l'impedenza caratteristica della linea,  $Z_s$  l'impedenza specifica serie (per unità di lunghezza) e  $Y_p$  l'ammettenza specifica parallela (per unità di lunghezza)

- Nel caso di linea uniforme con perdite ( $R \neq 0$ ,  $G \neq 0$ ) lunga  $l$  e chiusa su un carico complesso  $Z_L$  (i.e., linea caricata, come in figura), si ricorda che l'**impedenza di ingresso**  $Z_i = Z(-l)$  della linea in  $z = -l$  è data da:

$$Z_i = Z(-l) = Z_0 \frac{Z_L \cos(kl) + jZ_0 \sin(kl)}{Z_0 \cos(kl) + jZ_L \sin(kl)}$$

- La soluzione approssimata dell'eq. di Hallen, che fornisce la corrente  $I(z)$  che scorre sul dipolo, suggerisce di pensare l'**antenna come una linea di trasmissione** nella quale i due fili conduttori siano stati allineati lungo il medesimo asse.

- Nel caso generale di **dipolo alimentato centralmente, lungo  $l$  e caricato** agli estremi, ovvero con impedenza terminale  $Z_L$  tale che la corrente agli estremi è diversa da zero (come nel caso di dipolo hertziano), la **linea di trasmissione equivalente è lunga  $l/2$  e chiusa sul carico  $Z_L$** .



- Questa analogia tra antenne lineari e linee di trasmissione è adeguata tuttavia **solo per calcolare il campo irradiato**. Essa non è generalmente valida per calcolare l'impedenza d'ingresso dell'antenna  $Z_a$ , che coinciderebbe con  $Z_i$  nello schema equivalente e, in particolare, la sua parte resistiva legata alla potenza irradiata e la parte reattiva legata al campo vicino (come vedremo, ad esempio, nel caso di dipolo lungo  $\lambda/2$ ).

### 3.4.e Soluzione numerica mediante il metodo dei momenti

#### ➤ Discretizzazione dell'equazione integrale

- Ricordiamo l'equazione di Hallen per antenne lineari:

$$\int_{-l/2}^{l/2} I(z') G(z - z'; a) dz' = A^+ e^{-jkz} + A^- e^{jkz}$$

- Essa è un classico esempio di **equazione integrale**. Un'equazione si dice *integrale* quando la funzione incognita, cioè  $I(z)$  nel nostro caso, compare sotto segno di integrale. In analisi matematica la precedente equazione viene classificata come *eq. integrale di Fredholm di prima specie*, che a rigore non ammette soluzioni esplicite (in forma chiusa) per  $I(z)$ . Tuttavia, poiché l'operatore è lineare, è possibile risolverla **analiticamente** in modo approssimato, come già visto, oppure **numericamente** mediante metodi algebrici.
- Tali equazioni integrali si incontrano anche in problemi di diffrazione di campo elettromagnetico e sono note con il nome **equazione integrale del campo elettrico** (EFIE, Electric Field Integral Equation) ed **equazione integrale del campo magnetico** (MFIE, Magnetic Field Integral Equation).
- Posto  $I(z') \equiv g(z')$ , l'equazione di Hallen si può porre nella seguente forma astratta:

$$F[z, g(z')] = h(z)$$

dove  $F$  è un operatore lineare noto (e.g., integrale),  $h$  è una funzione nota (o di eccitazione) e  $g$  la funzione incognita (o di risposta). Il **problema consiste nel determinare  $g$  noti  $F$  e  $h$** .

- La generalità dei **metodo numerici** prevede lo sviluppo di  $g(z')$  attraverso la seguente combinazione lineare di  $N$  funzioni di base ("basis functions")  $g_n(z')$ :

$$\tilde{g}(z') = a_1 g_1(z') + \dots + a_N g_N(z') = \sum_{n=1}^N a_n g_n(z')$$

dove  $a_n$  sono N coefficienti costanti incogniti. Per la linearità dell'operatore  $F$ , si ha:

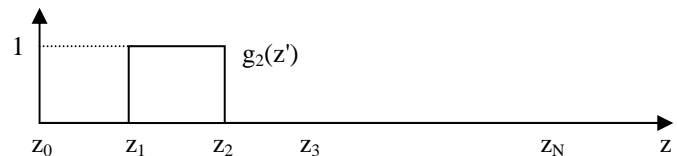
$$F[z, g(z')] \cong F[z, \sum_{n=1}^N a_n g_n(z')] = \sum_{n=1}^N a_n F[z, g_n(z')] \cong h(z)$$

dove  $F[z, g_n(z')]$  è valutabile analiticamente o numericamente. Lo sviluppo è evidentemente approssimato e pertanto per  $g(z')$  conduce ad un errore (o residuo) pari a:

$$R(z) = \sum_{n=1}^N a_n F[z, g_n(z')] - h(z)$$

- La scelta delle **funzioni di base**  $g_n(z')$  è dettata dall'accuratezza con cui la loro combinazione lineare può rappresentare la funzione incognita  $g(z')$ . Le funzioni di base si dividono in funzioni a sub-dominio (“*sub-domain functions*”) diverse da zero in porzioni dell'intervallo  $[-l/2, +l/2]$  non sovrapposte e funzioni a dominio intero (“*entire-domain functions*”) definite in tutto  $[-l/2, +l/2]$ . Una possibile funzione di base a sub-dominio è la funzione rettangolare (impulsiva):

$$g_n(z') = \begin{cases} 1 & z'_{n-1} \leq z' \leq z'_n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



### ➤ Metodo dei momenti

- Il **Metodo dei Momenti** (*MoM, Methods of Moments*) venne formulato da *Harrington* nel 1967. Il MoM forza le condizioni al contorno in cui vengono imposti i valori della funzione nota  $h(z)$  in modo che siano soddisfatte in media sull'intero dominio dove è definita la funzione incognita  $g$ . Tale tecnica è anche detta **metodo dei residui pesati** (“*weighted residuals*”).
- Si introducono N **funzioni peso** (“*weighting functions*”)  $w_m$ , appartenenti allo spazio  $L^2$  di Hilbert (come, d'altronde,  $g$ ,  $h$  e l'operatore  $F$ ) in cui si definisce il seguente prodotto scalare o interno:

$$\langle w, g \rangle = \int_l w^*(z) g(z) dz$$

- Applicando il prodotto scalare precedente all'equazione integrale discretizzata si ottengono un insieme di equazioni algebriche non omogenee nelle incognite  $a_n$ :

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle w_m(z), F[z, g_n(z')] \rangle = \langle w_m(z), h_m(z) \rangle \quad m = 1, 2, \dots, N$$

- Le funzioni peso sono scelte in maniera da rendere nullo il prodotto scalare con il residuo  $R(z)$  ovvero da minimizzare in media, sull'intervallo di definizione, l'errore di ricostruzione della funzione incognita:

$$\langle w_m, R \rangle = \int_l w_m^*(z) R(z) dz = 0$$

- La scelta della funzioni peso è importante perché, da una parte, devono dare luogo a N eq. linearmente indipendenti e, dall'altra, devono essere tali da minimizzare il calcolo computazionale del prodotto scalare. Una scelta che minimizza il costo computazionale è quella di adottare funzioni peso  $w_m$  che sono impulsi di Dirac, cioè:

$$w_m(z) \equiv \delta(z - z_m) \quad m = 1, 2, \dots, N$$

- Si ottiene il caso particolare del metodo dell'adattamento puntiforme (“point-matching”). I punti  $z=z_m$  sono un insieme discreto e finito di punti in cui si impone la  $h(z)=F[z, g(z)]$  nota (condizioni al contorno) e possono essere scelti eventualmente anche non equi-spaziati. L'equazione matriciale del metodo dei momenti si riduce alle seguenti in cui si campiona la  $h(z)$  negli N punti  $z=z_m$ :

$$\sum_{n=1}^N a_n F[z_m, g_n(z_m)] = h(z_m) \Rightarrow \sum_{n=1}^N a_n F_m[g_n] = h_m \Rightarrow \sum_{n=1}^N a_n F_{mn} = h_m \quad m = 1, 2, \dots, N$$

dove  $F_m[g_n]=F_{mn}$  indica il valore dell'operatore  $F$  in  $z=z_m$  applicato alla funzione  $g_n$ .

- In forma matriciale, il sistema precedente diventa:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} \underline{\underline{\mathbf{a}}} = \underline{\underline{\mathbf{h}}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{F}}} = \{F_{mn}\} = \{F_m[g_n]\} \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}} = \{a_n\} \\ \underline{\underline{\mathbf{h}}} = \{h_m\} \end{cases} \quad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots, N \\ m = 1, 2, \dots, N \end{matrix}$$

- Gli N coefficienti incogniti  $a_n$  possono calcolarsi considerando gli N punti  $z_n$  ed invertendo l'equazione matriciale:

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{h}}}$$

Calcolato il vettore  $\underline{\underline{\mathbf{a}}}$ , e quindi i coefficienti  $a_n$ , si può ricostruire la funzione incognita  $g(z) \equiv I(z)$ .

### ➤ Applicazione del Metodo dei Momenti

- Riassumiamo i passi necessari per l'applicazione del MoM al caso di dipolo cilindrico, in cui l'incognita  $I(z)$  è soluzioni dell'eq. di Hallen:

$$\int_{-l/2}^{l/2} I(z') \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(z-z')^2}} dz' = A^+ e^{-jkz} + A^- e^{jkz} \quad \forall z$$

meglio espressa, per questo scopo, nella seguente forma in cui si è esplicitata la tensione impressa  $V_0$  nel taglio (vedi Nota del par. 3.4.b):

$$\int_{-l/2}^{l/2} I(z') \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(z-z')^2}} dz' = \frac{1}{2j} \eta V_0 \sin(k|z|) + A_2 \cos(kz)$$

Si noti che la **costante**  $A_2$  era stata ricavata nella soluzione approssimata (per  $a \rightarrow 0$ ) imponendo le condizioni al contorno per  $z=l/2$ , ovvero specificando il tipo di caricamento dell'antenna (i.e., l'impedenza  $Z_L$ ).

- Nel caso dell'eq. integrale di Hallen il metodo dell'adattamento puntiforme (*point-matching*) conduce al seguente sistema di equazioni algebriche, in cui a destra isoliamo il termine noto:

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_{-l/2}^{l/2} g_n(z') G(z_m - z'; a) dz' - A_2 \cos(kz_m) = \frac{1}{2j} \eta V_0 \sin(k|z_m|)$$

- Considerata una scomposizione in N funzioni base le incognite sono gli N coefficienti  $a_n$  e la costante  $A_2$ . Scegliamo N segmenti in cui suddividere la lunghezza  $l$  (e.g.,  $N > 10 \ l/\lambda$ ). Si hanno N+1 punti lungo l'asse  $z$ , il sistema da risolvere sarà, quindi, di dimensione  $[(N+1) \times (N+1)]$   $[(N+1) \times 1] = [(N+1) \times 1]$  e dato da:

$$\sum_{n=1}^N a_n F_m[g_n] = \sum_{n=1}^N a_n F_{mn} = h_m \quad \text{con} \quad m = 1, 2, \dots, N+1$$

ovvero esplicitando i singoli termini:

$$\begin{bmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,N} & -\cos kz_1 \\ \dots & F_{nm} & \dots & -\cos kz_n \\ F_{N+1,1} & \dots & F_{N+1,N} & \cos kz_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ \dots \\ a_N \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-j}{2} \eta V_0 \sin(k|z_1|) \\ \dots \\ \frac{-j}{2} \eta V_0 \sin(k|z_n|) \\ \dots \\ \frac{-j}{2} \eta V_0 \sin(k|z_{N+1}|) \end{bmatrix}$$

Scegliendo una funzione di base impulsiva i termini della matrice dei coefficienti si calcolano analiticamente o numericamente con le seguenti:

$$F_{nm} = \int_{-l/2}^{l/2} g_n(z') \frac{e^{-jk\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} dz' = \int_{z_m - \Delta z/2}^{z_m + \Delta z/2} \frac{e^{-jk\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} dz'$$

Ciascun termine del sistema è, in generale, **complesso**. L'inversione del sistema nelle incognite  $a_1, \dots, a_N, A_2$  fornisce la distribuzione di corrente cercata  $I(z)$  sull'antenna. L'eq. integrale risulta verificata esattamente negli N+1 punti considerati. Al di fuori di essi possono esistere instabilità della soluzione tali da far preferire funzioni peso non impulsive. Nel prossimo paragrafo relativo ai dipoli rettilinei non caricati si mostrerà un **confronto quantitativo** tra soluzione approssimata e soluzione numerica MoM.

- Il Metodo dei Momenti (MoM) applicato all'eq. di Hallen, e più in generale a problemi basati sulle Equazioni Integrali (e.g., EFIE e MFIE), trova vaste applicazioni nel campo delle antenne. Tra gli **applicativi software** che implementano il MoM e più utilizzati, citiamo:

1. **Numerical Electromagnetics Code (NEC)**: adatto per l'analisi dell'interazione tra campo e.m. e strutture arbitrarie schematizzabili mediante fili e superfici conduttrici. Si estende anche a reti passive e linee di trasmissione, includendo gli effetti dei piani di terra, dei carichi concentrati, dei conduttori imperfetti. Calcola correnti, campo e.m. vicino e lontano, impedenza di ingresso, sezioni trasverse radar, collegamenti e accoppiamenti tra antenne.

2. **Mini- Numerical Electromagnetics Code (Mini-NEC):** versione ridotta del NEC principalmente per l'analisi di antenne lineari. Calcola correnti, campo e.m. vicino e lontano e impedenza di ingresso con possibilità di sintesi del diagramma di radiazione.