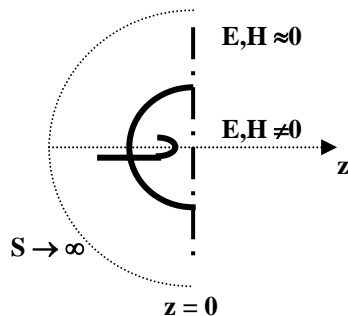


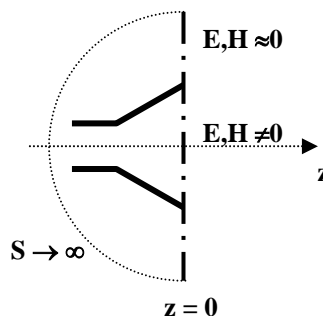
## 4. ANTENNE AD APERTURA

### 4.1 CONCETTO DI APERTURA

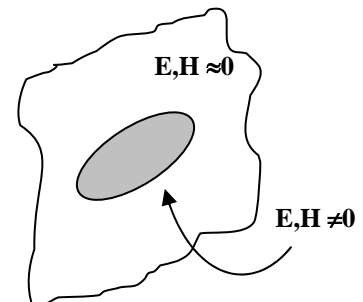
- ❑ In molte antenne è possibile individuare un'apertura, grande rispetto alla lunghezza d'onda, attraverso cui viene irradiata o ricevuta la radiazione e.m.. Considerato un piano passante per la bocca dell'antenna, una porzione di esso di area  $A$  costituisce l'apertura o bocca radiante. Può essere di forma diversa, quadrata, circolare, rettangolare, ellittica.
- ❑ Esempi di antenne ad apertura sono: antenne a riflettore parabolico, antenne a tromba, antenne a lente, foro in uno schermo metallico, guida d'onda troncata.
- ❑ Come per le antenne filiformi, il problema e.m. consiste nel determinare la distribuzione di corrente sulle strutture metalliche dell'antenna, ovvero il campo tangenziale su una superficie di riferimento (apertura o bocca radiante). A tal scopo si impostano equazioni integrali per il campo e.m. oppure si ricavano soluzioni approssimate.



**Paraboloide:** superficie metallica porzione di una conica ed illuminatore



**Tromba:** struttura metallica divergente troncata

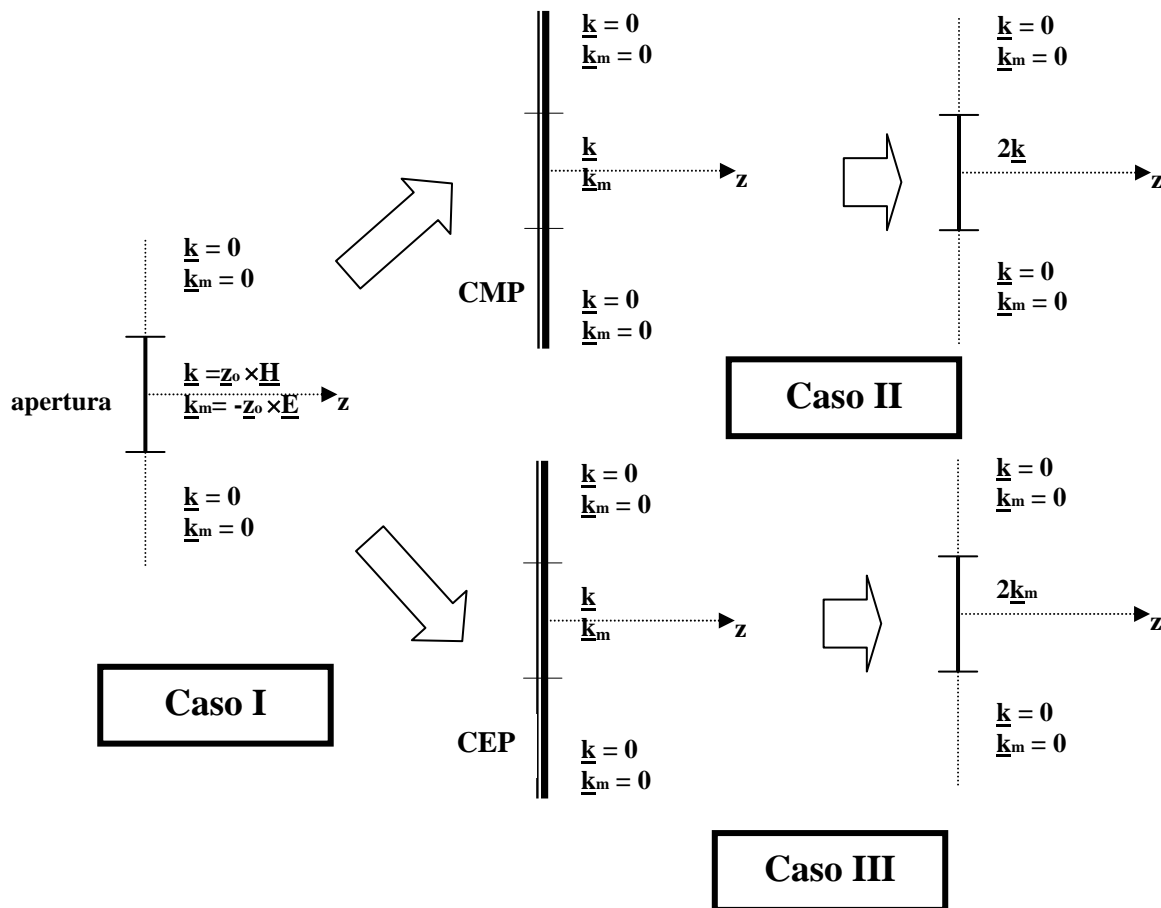


**Generica apertura A** con campi noti, porzione di un piano con campi nulli

### 4.2 METODO DELL'APERTURA

- ❑ Il **metodo dell'apertura** è una applicazione del teorema di equivalenza e consta di alcuni passi ed approssimazioni.
- ❑ Consideriamo il piano  $z=0$  con versore della normale  $\underline{z}_0$  e su di esso la superficie  $A$  dell'apertura. Applichiamo il teorema di equivalenza al volume racchiuso dal piano  $z=0$  (piano dell'apertura) e dalla semisfera all'infinito ( $S \rightarrow \infty$ ) assumendo  $\underline{E}=0$  e  $\underline{H}=0$  nel semispazio a sinistra.

- Il campo nella regione  $z > 0$  si calcola a partire dalle correnti equivalenti  $\underline{k}$  e  $\underline{k}_m$  che sostengono la discontinuità sul piano di bocca, funzioni delle componenti tangenziali dei campi elettrico e magnetico presenti sul piano, a destra ( $z=0^+$ ), ovvero:  $\underline{k}=\underline{z}_0 \times \underline{H}$  e  $\underline{k}_m=-\underline{z}_0 \times \underline{E}$ .
- Nel problema equivalente il semispazio a sinistra può essere riempito con:
  - caso I lo stesso mezzo che sta a destra (spazio libero). In tal caso,  $\underline{k}$  e  $\underline{k}_m$  irradiano nello spazio libero (fig. a sinistra).
  - caso II un Conduttore Magnetico Perfetto (CMP). Applicando successivamente il teorema delle immagini, rimane la distribuzione di correnti elettriche  $2\underline{k}=2\underline{z}_0 \times \underline{H}$  (fig. in alto a destra) che irradiano nello spazio libero.
  - caso III un Conduttore Elettrico Perfetto (CEP). Applicando successivamente il teorema delle immagini, rimane la distribuzione di correnti magnetiche  $2\underline{k}_m=-2\underline{z}_0 \times \underline{E}$  (figura in basso a destra) che irradiano nello spazio libero.

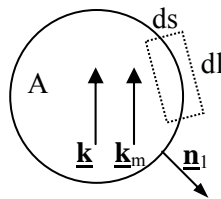


- Si fa l'approssimazione fondamentale che il campo tangenziale e, quindi le correnti equivalenti, siano diverse da zero solo all'interno della apertura e nulle sul piano  $z=0$  al di fuori della regione A dell'apertura.
- Nel caso I si assume che  $\underline{E}$ ,  $\underline{H}$  soddisfino la **condizione di onda piana** che viaggia nella direzione delle  $z$  positive. In questo modo, come negli altri due casi, ci si riferisce soltanto al campo elettrico o magnetico sull'apertura in quanto:

$$\underline{H} = \frac{1}{\eta} \underline{z}_0 \times \underline{E} \quad ; \quad \underline{E} = -\eta(\underline{z}_0 \times \underline{H})$$

**Note:**

- ❖ Nel caso di un **foro in un piano metallico**,  $\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}$  è effettivamente nullo fuori di A (sul metallo) e pertanto l'annullamento delle  $2\mathbf{k}_m$  nel caso III (figura in basso) non costituisce una approssimazione. Il problema dell'antenna ad apertura è simile a quello della diffrazione da parte di uno schermo metallico.
- ❖ I **tre problemi equivalenti** prima introdotti (caso I: presenza di  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}_m$ , caso II:  $2\mathbf{k}=2\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}$ , caso III:  $2\mathbf{k}_m=-2\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}$ ) conducono alla stessa soluzione se il campo sul piano  $z=0$  è noto. Con l'approssimazione di campo nullo sulla superficie al di fuori di A danno luogo a **soluzioni differenti** nei punti lontani dall'asse z.  
**Al di fuori della bocca**, secondo le ipotesi fatte, il campo prodotto dalla distribuzione di correnti equivalenti dovrebbe soddisfare le condizioni  $\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ , affinché in tale zona  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_m = \mathbf{0}$ . In realtà, la soluzione nei punti con  $\theta = \pi/2$  (che si trovano quindi sul piano  $z=0$ ) non verificano necessariamente tale condizione.  
 Il metodo dell'apertura dà risultati soddisfacenti se **le dimensioni di quest'ultima sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda**  $\lambda$  ed il campo a distanza  $z > 0$  è valutato per angoli  $\theta$  non troppo grandi (lontano dal piano di bocca in cui sono state effettuate le approssimazioni descritte).
- ❖ L'ipotesi di campo nullo all'esterno di A e diverso da zero all'interno introduce una discontinuità che viola le equazioni di Maxwell. Si usa il **metodo di Kottler** che introduce opportune cariche lungo il contorno di A che sostengono la discontinuità delle correnti superficiali  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_m$  (ovvero dei campi).



Passando da densità volumetriche a superficiali, la legge di continuità della corrente diventa:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{k} = -j\omega\rho_s$$

Se  $\mathbf{n}_l$  è la normale al contorno di A uscente, integrando  $\nabla \cdot \mathbf{k}$  su una superficie rettangolare infinitesima di area  $ds dl$  (che racchiude parte del contorno) ed applicando il teorema della divergenza, l'unico contributo non nullo al flusso di  $\mathbf{k}$  proviene dal lato  $dl$  (con normale  $-\mathbf{n}_l$ ) interno, essendo i contributi dovuti ai lati  $ds$  uguali e opposti e quello dovuto al lato  $dl$  esterno nullo in quanto è nullo fuori A il campo e.m.. Si ricava la distribuzione di cariche  $\rho_l$  da porre sul contorno di A ( $\rho_l$  ha dimensioni C/m):

$$\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{k} = j\omega \rho_l \quad \text{e dualmente} \quad \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{k}_m = j\omega \rho_{ms}$$

- ❖ Con il teorema di equivalenza abbiamo spostato il problema dal calcolo del campo al calcolo delle sorgenti equivalenti, ovvero del campo sull'apertura (*bocca* dell'antenna). Quest'ultimo è, comunque, un **problema di diffrazione** di difficile soluzione per cui si ricorre a metodi approssimati come l'ottica geometrica (nel caso delle antenne a riflettore), oppure assumendo la soluzione imperturbata del campo nella struttura guidante che alimenta l'apertura (guide troncate od antenne a tromba).

## 4.2.a Campo a grande distanza: funzioni di illuminazione e di radiazione

- Con il metodo dell'apertura il campo a distanza viene ricavato utilizzando le **formule di radiazione nella regione di Fraunhofer** per sorgenti (densità di correnti impresse elettriche e magnetiche) nello spazio libero, ricavate nel cap. 2 sulla teoria della radiazione e.m.:

$$E_{\theta}(\underline{r}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \int_V J_{\theta} e^{jk_0 \underline{r}_0 \cdot \underline{r}'} d^3 \underline{r}' - \frac{jk_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \int_V J_{m\varphi} e^{jk_0 \underline{r}_0 \cdot \underline{r}'} d^3 \underline{r}'$$

$$E_{\varphi}(\underline{r}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \int_V J_{\varphi} e^{jk_0 \underline{r}_0 \cdot \underline{r}'} d^3 \underline{r}' + \frac{jk_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \int_V J_{m\theta} e^{jk_0 \underline{r}_0 \cdot \underline{r}'} d^3 \underline{r}'$$

- Consideriamo il terzo problema equivalente (caso III), sostituiamo  $\underline{J}_m$  con le sorgenti equivalenti  $2\underline{k}_m = -2\underline{z}_0 \times \underline{E}$ . Trattandosi di correnti superficiali (funzioni impulsive nella variabile  $z'$ ) l'integrale volumetrico scala di una dimensione e diventa un integrale di superficie ( $\underline{J}_m \Rightarrow \underline{k}_m$ ;  $V \Rightarrow A$ ) dove  $d^2 \underline{r}'$  rappresenta l'elemento di superficie sul piano dell'apertura.

- Introduciamo le componenti cartesiane delle sorgenti superficiali mediante:

$$\begin{cases} J_{m\theta} \Rightarrow 2k_{mx} \cos \theta \cos \varphi + 2k_{my} \cos \theta \sin \varphi \\ J_{m\varphi} \Rightarrow -2k_{mx} \sin \varphi + 2k_{my} \cos \varphi \end{cases} \quad 2\underline{k}_m = -2\underline{z}_0 \times \underline{E} \Rightarrow \begin{cases} 2k_{mx} = 2E_y \\ 2k_{my} = -2E_x \end{cases}$$

- Sostituiamo nella formula radiativa. Essendo  $\frac{jk_0}{4\pi} = j\frac{1}{2\lambda}$ , si ottiene:

$$E_{\theta}(\underline{r}) = \frac{j}{\lambda r} e^{-jk_0 r} \int_A (E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi) e^{jk_0 \underline{r}_0 \cdot \underline{r}'} d^2 \underline{r}'$$

$$E_{\varphi}(\underline{r}) = -\frac{j}{\lambda r} e^{-jk_0 r} \cos \theta \int_A (E_x \sin \varphi - E_y \cos \varphi) e^{jk_0 \underline{r}_0 \cdot \underline{r}'} d^2 \underline{r}'$$

- Introduciamo la **funzione di illuminazione** vettoriale  $\underline{f}_t(\underline{r}_t)$  di componenti trasverse  $f_x$  e  $f_y$ , pari alla componente tangenziale del campo sull'apertura:

$$\underline{f}_t(\underline{r}_t) = f_x(\underline{r}_t) \underline{x}_0 + f_y(\underline{r}_t) \underline{y}_0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} f_x(\underline{r}_t) = E_x(\underline{r}_t, 0) \\ f_y(\underline{r}_t) = E_y(\underline{r}_t, 0) \end{cases}$$

- Definiamo inoltre il vettore  $\hat{\underline{k}} = k_0 \underline{r}_0$  pari al vettore di propagazione di un'onda piana che si propaga nella direzione di osservazione  $\underline{r}_0$ , essendo:

$$\hat{\underline{k}} = k_0 \underline{r}_0 = \hat{k}_x \underline{x}_0 + \hat{k}_y \underline{y}_0 + \hat{k}_z \underline{z}_0 = \hat{\underline{k}}_t + \hat{k}_z \underline{z}_0 \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \hat{k}_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi \\ \hat{k}_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi \\ \hat{k}_z = k_0 \cos \theta \end{cases}$$

E quindi, per un generico punto sull'apertura  $\underline{r}_t' = x' \underline{x}_0 + y' \underline{y}_0$ , possiamo scrivere il prodotto scalare  $k_0 \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_t'$  nella forma:

$$\hat{\underline{k}} \cdot \underline{r}_t' = k_0 \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_t' = \hat{k}_x x' + \hat{k}_y y' = x' k_0 \sin \theta \cos \varphi + y' k_0 \sin \theta \sin \varphi$$

- Introduciamo, allora, la funzione di radiazione (trasversa)  $\underline{F}_t(\hat{k}_x, \hat{k}_y)$  con componenti cartesiane  $F_x$  e  $F_y$  (con dimensione  $V \cdot m$ ), formalmente uguale alla trasformata di Fourier di  $\underline{f}_t$  calcolata per  $k_x = \hat{k}_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi$  e  $k_y = \hat{k}_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi$ :

$$\underline{\mathbf{F}}_t(\hat{k}_x, \hat{k}_y) = \underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi) = F_x(\hat{k}_x, \hat{k}_y) \underline{\mathbf{x}}_0 + F_y(\hat{k}_x, \hat{k}_y) \underline{\mathbf{y}}_0 =$$

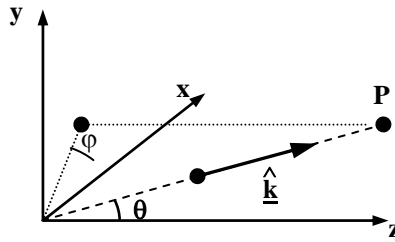
$$\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}'_t) e^{j\hat{k}_x \underline{\mathbf{r}}'_t} d^2 \underline{\mathbf{r}}'_t = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}'_t) e^{j(x'k_0 \sin \theta \cos \varphi + y'k_0 \sin \theta \sin \varphi)} d^2 \underline{\mathbf{r}}'_t$$

- Con le posizioni precedenti si osserva che, se nella precedente formula del campo elettrico estendiamo i limiti di integrazione a  $[-\infty$  a  $+\infty]$  avendo assunto nullo il campo fuori di A ovvero la funzione  $\underline{\mathbf{f}}_t$  limitata, si ottiene la seguente espressione del campo radiato a grande distanza:

$$E_\theta(\underline{\mathbf{r}}) = E_\theta(r, \theta, \varphi) = j \frac{1}{\lambda r} e^{-jk_0 r} \left[ \cos \varphi F_x(\hat{k}_t) + \sin \varphi F_y(\hat{k}_t) \right]$$

$$E_\varphi(\underline{\mathbf{r}}) = E_\varphi(r, \theta, \varphi) = j \frac{1}{\lambda r} \cos \theta e^{-jk_0 r} \left[ \cos \varphi F_y(\hat{k}_t) - \sin \varphi F_x(\hat{k}_t) \right]$$

- Pertanto il **campo prodotto in zona di Fraunhofer da un'apertura** nella direzione  $\theta, \varphi$  può esprimersi, a meno di coefficienti, mediante la **funzione di radiazione**, ovvero con la **trasformata di Fourier della funzione di illuminazione** calcolata per una determinata frequenza spaziale  $\hat{\underline{\mathbf{k}}}$ . Al variare della direzione di osservazione si seleziona una diversa frequenza spaziale dello spettro di  $\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}_t)$ .



**Nota:**

- ❖ Scriviamo anche le componenti cartesiane del campo (ricordando che  $E_r=0$ ):

$$E_x(\underline{\mathbf{r}}) = E_x(r, \theta, \varphi) = E_\theta \cos \theta \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi = j \frac{1}{\lambda r} e^{-jk_0 r} \cos \theta F_x(\hat{k}_t)$$

$$E_y(\underline{\mathbf{r}}) = E_y(r, \theta, \varphi) = E_\theta \cos \theta \sin \varphi + E_\varphi \cos \varphi = j \frac{1}{\lambda r} e^{-jk_0 r} \cos \theta F_y(\hat{k}_t)$$

$$E_z(\underline{\mathbf{r}}) = E_z(r, \theta, \varphi) = -\sin \theta E_\theta(r, \theta, \varphi) = -j \frac{1}{\lambda r} e^{-jk_0 r} \sin \theta \left[ \cos \varphi F_x(\hat{k}_t) + \sin \varphi F_y(\hat{k}_t) \right]$$

- ❖ Non è possibile, in generale, esprimere il campo a grande distanza come trasformata di Fourier del campo tangenziale sull'apertura (la funzione di illuminazione).  
Ad esempio, se sull'apertura c'è un'onda piana diretta come z e quindi il campo è ortogonale a z, il campo nel punto di osservazione è un'onda TEM con campi trasversi rispetto alla direzione di propagazione  $\underline{\mathbf{r}}_0$  ed ha invece componente lungo z non nulla. Quest'ultima è legata alle altre per assicurare la condizione di  $\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}=0$ .
- ❖ Nel caso di osservazione parassiale, invece, ( $\theta=0$ ), la componente  $E_z(\underline{\mathbf{r}})$  è nulla e il campo osservato è proporzionale alla trasformata di Fourier del campo tangenziale sull'apertura.

## 4.3 METODO DELLA TRASFORMATATA DI FOURIER

- Il teorema di equivalenza conduce a ricavare il campo generato dall'antenna dal campo tangenziale sull'apertura. In alternativa, il calcolo del campo irradiato da quello tangenziale sull'apertura è deducibile anche con un approccio basato sulla trasformata di Fourier e lo sviluppo in onde piane.

### 4.3.a Sviluppo in onde piane in forma vettoriale

- Ricordiamo come in un mezzo opportuno un campo elettromagnetico qualsiasi può essere espresso come la combinazione di una infinità ( $\infty^2$ ) di onde piane. Con riferimento ad una generica componente cartesiana del campo  $E$  abbiamo ricavato la seguente formula a partire dalla eq. di Helmholtz omogenea (si veda Cap. 2):

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{k_x, k_y}(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z} dk_x dk_y$$

dove la trasformata di Fourier bidimensionale del campo sul piano  $z=0$  è data da:

$$E_{k_x, k_y}(k_x, k_y) = E_{k_t}(\underline{k}_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, 0) e^{jk_x x + jk_y y} dx dy = \mathfrak{T}_{x,y} \{ E(x, y, 0) \}$$

e le componenti del vettore di propagazione di ciascuna onda piana seguono la relazione di dispersione che scriviamo nel caso di spazio libero:

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_x^2 - k_y^2}$$

- Dunque, la trasformata bidimensionale  $E_{k_t}(k_x, k_y, z)$  della componente scalare  $E(x, y, z)$  è determinata dalla trasformata della stessa componente sul piano  $z=0$ . Infatti, scrivendo la antitrasformata bidimensionale:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{k_x, k_y}(k_x, k_y, z) e^{-jk_x x - jk_y y} dk_x dk_y$$

dal confronto con l'espressione iniziale si deduce che, nota la trasformata bidimensionale su un piano, si ha quella su un altro piano parallelo posto ad una distanza  $z$  dal primo con la semplice relazione:

$$E_{k_t}(k_x, k_y, z) = \mathfrak{T}_{x,y} \{ E(x, y, z) \} = E_{k_t}(k_x, k_y) e^{-j\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} z} = E_{k_t}(k_x, k_y) e^{-jk_z z}$$

- Lo sviluppo scalare in onde piane è stato dedotto dalla equazione di Helmholtz omogenea. Il campo deve però verificare anche la equazione  $\nabla \cdot \underline{E} = 0$ . In coordinate cartesiane si ha:

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} = 0$$

Trasformando due volte, rispetto a  $x$  ed a  $y$ , ed indicando le trasformate delle singole componenti cartesiane con  $E_{xk_t}, E_{yk_t}, E_{zk_t}$  si ottiene:

$$-jk_x E_{xk_t}(k_x, k_y, z) - jk_y E_{yk_t}(k_x, k_y, z) + \frac{\partial E_{zk_t}(k_x, k_y, z)}{\partial z} = 0$$

Usando la relazione  $E_{k_t}(k_x, k_y, z) = E_{k_t}(k_x, k_y)e^{-jk_z z}$  valida per ogni componente e semplificando il fattore comune  $e^{-jk_z z}$ , si trova che le trasformate delle tre componenti sul piano  $z=0$  non sono indipendenti e quindi la componente  $E_{z k_t}(k_x, k_y)$  lungo  $z$  può ricavarsi da quelle  $E_{x k_t}(k_x, k_y)$  e  $E_{y k_t}(k_x, k_y)$ , lungo  $x$  e  $y$ :

$$k_x E_{x k_t}(k_x, k_y) + k_y E_{y k_t}(k_x, k_y) + k_z E_{z k_t}(k_x, k_y) = \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(k_x, k_y) = 0$$

- Scrivendo lo sviluppo scalare per ogni componente cartesiana del campo e considerando il vincolo precedente siamo in grado di scrivere il campo vettoriale in un punto qualsiasi in funzione delle trasformate delle componenti tangenziali del campo sul piano  $z=0$  (piano dell'apertura). In forma compatta:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(\underline{\mathbf{k}}_t) e^{-j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}} d\underline{\mathbf{k}}_t^2 \quad \text{con} \quad \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(k_x, k_y) = 0, \quad \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{k}} = k_0^2$$

- Il campo  $\underline{\mathbf{H}}$  si ricava dalle equazioni di Maxwell:

$$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})}{-j\omega\mu} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(\underline{\mathbf{k}}_t) e^{-j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}} d\underline{\mathbf{k}}_t^2$$

- L'operatore rotore  $\nabla \times [\ ]$  agisce su  $\underline{\mathbf{r}}$ . Portandolo dentro l'integrale, ricordando che con  $\phi$  funzione scalare e  $\underline{\mathbf{A}}$  funzione vettoriale vale la regola  $\nabla \times [\phi \underline{\mathbf{A}}] = \underline{\mathbf{A}} \times \nabla \phi + \phi \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$ , che  $\nabla \times \underline{\mathbf{E}}_{k_t} = 0$  (in quanto  $\underline{\mathbf{E}}_{k_t}$  non dipende da  $\underline{\mathbf{r}}$ ) mentre per il gradiente vale la relazione  $\nabla[e^{-j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}}] = -j\underline{\mathbf{k}} \times e^{-j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}}$ , possiamo scrivere lo sviluppo vettoriale in onde piane anche per  $\underline{\mathbf{H}}$ :

$$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{k}} \times \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(\underline{\mathbf{k}}_t) e^{-j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}} d\underline{\mathbf{k}}_t^2$$

- In forma più esplicita la relazione per il campo  $\underline{\mathbf{E}}$  è la seguente:

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \underline{\mathbf{x}}_0 E_{x k_t}(\underline{\mathbf{k}}_t) + \underline{\mathbf{y}}_0 E_{y k_t}(\underline{\mathbf{k}}_t) - \underline{\mathbf{z}}_0 \frac{k_x E_{x k_t}(\underline{\mathbf{k}}_t) + k_y E_{y k_t}(\underline{\mathbf{k}}_t)}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}} \right] e^{-jk_x x - jk_y y - j\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} z} d\underline{\mathbf{k}}_t^2$$

- Infine è utile anche esplicitare la dipendenza dal punto di osservazione in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{E}}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(\underline{\mathbf{k}}_t) e^{-j\underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{k}}_0} d\underline{\mathbf{k}}_t^2 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(k_x, k_y) e^{-jr(k_x \sin \theta \cos \varphi + k_y \sin \theta \sin \varphi + k_z \cos \theta)} dk_x dk_y \end{aligned}$$

- Tali relazioni non contengono alcuna approssimazione riguardo la distanza dal piano  $z=0$  ed includono nell'integrale sia onde piane con  $\underline{\mathbf{k}}$  reale che trasportano potenza attiva e contribuiscono al campo radiativo, sia onde con  $k_z$  immaginario ( $k_x, k_y$  fuori del cerchio di raggio  $k_0$ ) evanescenti lungo  $z$  che trasportano potenza reattiva e determinano il campo in prossimità dell'apertura.
- Ritroviamo inoltre il fatto, noto dal teorema di unicità, che per ricostruire il campo e.m. in un punto qualsiasi è sufficiente conoscere sul piano il campo elettrico (o quello magnetico), ma non entrambi.

### 4.3.b Campo a grande distanza

- Nello sviluppo in onde piane osserviamo che la funzione integranda contiene un fattore esponenziale di argomento immaginario. Esso è una funzione di tipo oscillante dell'argomento che a sua volta dipende dalle variabili di integrazione  $k_x$  e  $k_y$  (funzione di tipo seno e coseno). Al crescere della distanza  $r$  del punto di osservazione dall'origine le oscillazioni hanno frequenza crescente con  $k_x$  e  $k_y$  ed elevata rispetto alla variabilità di  $\underline{\mathbf{E}}_{k_t}(k_x, k_y)$ . Pertanto si hanno contributi positivi e negativi che tendono ad annullarsi tra loro nell'integrazione. Si dimostra che l'integrale tende asintoticamente (per  $r \rightarrow \infty$ ) ad un valore determinato solo dal valore della funzione integranda calcolata nel punto in cui l'argomento dell'esponenziale non varia rispetto a  $k_x$  e  $k_y$ , ovvero dove esiste un massimo o un minimo di tale argomento (**punto di sella**). Nel nostro caso ciò accade quando il vettore  $\underline{\mathbf{k}}$  è parallelo al vettore  $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{x}}_0 \sin \theta \cos \varphi + \underline{\mathbf{y}}_0 \sin \theta \sin \varphi + \underline{\mathbf{z}}_0 \cos \theta$ . Essendo poi il modulo di  $\underline{\mathbf{k}}$  pari a  $k_0$  ciò si verifica quando:

$$\underline{\mathbf{k}} = \hat{\underline{\mathbf{k}}} = k_0 \underline{\mathbf{r}}_0 = \underline{\mathbf{x}}_0 k_0 \sin \theta \cos \varphi + \underline{\mathbf{y}}_0 k_0 \sin \theta \sin \varphi + \underline{\mathbf{z}}_0 k_0 \cos \theta$$

- Tale fatto è espresso rigorosamente dal **Metodo della fase stazionaria**, secondo cui il valore asintotico dell'integrale (per  $r \rightarrow \infty$ ) è proporzionale al valore della funzione integranda calcolata nel punto di sella.. Per tale frequenza spaziale risulta inoltre  $\hat{\underline{\mathbf{k}}} \cdot \underline{\mathbf{r}}_0 = k_0$  e si ottiene (la dimostrazione è tra le note):

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = j k_0 \cos \theta \frac{e^{-j r k_0}}{2 \pi r} \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(\hat{k}_x, \hat{k}_y) \quad \text{con} \quad \hat{\underline{\mathbf{k}}} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(k_x, k_y) = 0$$

- Si ritrova pertanto quanto derivato al paragrafo precedente, ossia che il **campo prodotto a grande distanza da un'apertura** nella direzione  $\theta, \varphi$  può esprimersi, a meno di coefficienti, mediante la **trasformata di Fourier del campo trasverso sull'apertura (ovvero la funzione di illuminazione)** calcolata per una frequenza spaziale  $\hat{\underline{\mathbf{k}}}$  che corrisponde al vettore di propagazione di un'onda piana diretta nella direzione di osservazione  $\underline{\mathbf{r}}_0$ .
- Il campo irradiato coincide con quello già ricavato con il metodo dell'apertura nella approssimazione di Fraunhofer. Si conferma pertanto un'onda sferica localmente piana e delle infinite ( $\infty^2$ ) onde piane che compongono il campo in un punto qualunque, abbiamo dimostrato come a grande distanza dalle sorgenti sia "prevalente" quella che si propaga nella direzione in cui l'osservatore vede l'insieme delle sorgenti.

**Nota:**

#### ➤ Dimostrazione

- Il **Metodo della fase stazionaria** (di cui omettiamo la dimostrazione) afferma che se abbiamo due funzioni  $f(\alpha, \beta)$ ,  $g(\alpha, \beta)$  reali e un integrale nella forma:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) e^{-j k r g(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta$$

se si considera un punto  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  per cui si annullano le derivate prime (**punto di fase stazionaria** o **punto di sella**) di  $g(\alpha, \beta)$  ovvero per cui:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} g(\alpha, \beta) \right|_{\alpha=\hat{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \alpha} g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial}{\partial \beta} g(\alpha, \beta) \right|_{\beta=\hat{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \beta} g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0$$

allora, quando  $k r \gg 1$ , vale la seguente relazione approssimata:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) e^{-jkrg(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta \approx \frac{-2\pi j \sigma}{kr \sqrt{|ab - c^2|}} f(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) e^{-jkrg(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

dove:

$$a = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) ; \quad b = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) ; \quad c = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) ; \quad \begin{cases} \sigma = +1 & \text{per } ab > c^2 \quad a > 0 \\ \sigma = -1 & \text{per } ab > c^2 \quad a < 0 \\ \sigma = -j & \text{per } ab < c^2 \end{cases}$$

□ L'integrale che vogliamo calcolare si presenta in tale forma assumendo:

$$\alpha = k_x \quad \beta = k_y \quad f(\alpha, \beta) = E_k(k_x, k_y) \quad g(\alpha, \beta) = \frac{1}{k_0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0$$

□ Il punto di fase stazionaria si ricava dalle equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial k_x} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 = \sin \theta \cos \varphi - \frac{k_x \cos \theta}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}} = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial k_y} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 = \sin \theta \sin \varphi - \frac{k_y \cos \theta}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}} = 0$$

□ La cui soluzione è la seguente e corrispondente a  $\hat{\mathbf{k}}$  parallelo a  $\mathbf{r}_0$  (si ricava con semplici passaggi che omettiamo):

$$k_x = \hat{k}_x = k_o \sin \theta \cos \varphi \quad k_y = \hat{k}_y = k_o \sin \theta \sin \varphi$$

□ Calcolando le derivate seconde nel punto di fase stazionaria e conseguentemente le quantità  $a$ ,  $b$ , e  $c$  (omettiamo i semplici passaggi) il valore asintotico dell'integrale (per  $k_0 r \gg 1$ ) risulta pari a:

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = jk_0 \cos \theta \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r} \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(k_o \sin \theta \cos \varphi, k_o \sin \theta \sin \varphi) \quad \text{con } \hat{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{k_t}(\hat{k}_x, \hat{k}_y) = 0$$

➤ Antitrasformando l'ultima rispetto alle frequenze spaziali  $k_x, k_y$  ed applicando una nota proprietà del prodotto delle trasformate, si ottiene il campo in un punto come convoluzione nelle variabili spaziali di quello sulla superficie  $z=0$  con una funzione che, si dimostra, può essere messa in relazione con la funzione di Green nello spazio libero. Si scrive infatti:

$$E(x, y, z) = \mathfrak{T}_{x,y}^{-1} \{E_{k_t}(k_x, k_y, z)\} = \mathfrak{T}_{x,y}^{-1} \{E_{k_t}(k_x, k_y)\} \otimes \mathfrak{T}_{x,y}^{-1} \{e^{-jk_z z}\} = 2E(x, y, 0) \otimes \frac{\partial}{\partial z} [G(\mathbf{r})]$$

essendo possibile dimostrare le seguenti relazioni (si noti che la funzione di Green presenta una singolarità e che il calcolo analitico della sua trasformata richiede l'applicazione del teorema dei residui):

$$G_{k_t}(\mathbf{k}_t, z) = \mathfrak{T}_{x,y} \{G(\mathbf{r})\} = \frac{e^{-jk_z |z|}}{2jk_z} = \frac{e^{-j|z|\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}}}{2j\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}} ; \quad \mathfrak{T}_{x,y} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} G(\mathbf{r}) \right\} = \frac{e^{-jk_z |z|}}{2} = \frac{e^{-j|z|\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}}}{2}$$

## 4.4 VETTORE DI POYNTING E INTENSITÀ DI RADIAZIONE

- L'onda irradiata a grande distanza è TEM, localmente piana ed il vettore di Poynting è diretto lungo  $\mathbf{r}_0$ :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2\eta} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \mathbf{r}_0 = \frac{1}{2\eta} (E_\theta E_\theta^* + E_\varphi E_\varphi^*) \mathbf{r}_0$$

Ricordiamo le formule ricavate del campo elettrico:

$$E_\theta(\mathbf{r}) = E_\theta(r, \theta, \varphi) = j \frac{E_0}{\lambda r} e^{-jk_0 r} \left[ \cos \varphi F_x(\hat{\mathbf{k}}_t) + \sin \varphi F_y(\hat{\mathbf{k}}_t) \right]$$

$$E_\varphi(\mathbf{r}) = E_\varphi(r, \theta, \varphi) = j \frac{E_0}{\lambda r} e^{-jk_0 r} \cos \theta \left[ \cos \varphi F_y(\hat{\mathbf{k}}_t) - \sin \varphi F_x(\hat{\mathbf{k}}_t) \right]$$

- A parte un fattore  $1/2\eta(1/\lambda r)^2$ , sostituendo si ricava:

$$\begin{aligned} & \left| \cos \varphi F_x(\hat{\mathbf{k}}_t) + \sin \varphi F_y(\hat{\mathbf{k}}_t) \right|^2 + \cos^2 \theta \left| \cos \varphi F_y(\hat{\mathbf{k}}_t) - \sin \varphi F_x(\hat{\mathbf{k}}_t) \right|^2 = \\ & = F_x F_x^* \cos^2 \varphi + F_y F_y^* \sin^2 \varphi + F_x F_y^* \cos \varphi \sin \varphi + F_y F_x^* \cos \varphi \sin \varphi + \cos^2 \theta F_x F_x^* \sin^2 \varphi + \\ & + \cos^2 \theta F_y F_y^* \cos^2 \varphi - \cos^2 \theta F_x F_y^* \cos \varphi \sin \varphi - \cos^2 \theta F_y F_x^* \cos \varphi \sin \varphi = \\ & = F_x F_x^* (\cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) + F_y F_y^* (\sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi) + \\ & + \sin^2 \theta (F_x F_y^* \cos \varphi \sin \varphi + F_x F_y^* \cos \varphi \sin \varphi) = \\ & = F_x F_x^* (\cos^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) + F_y F_y^* (\cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) + \\ & + \sin^2 \theta (F_x F_y^* \cos \varphi \sin \varphi + F_x F_y^* \cos \varphi \sin \varphi) = \\ & = F_x F_x^* \cos^2 \theta + F_y F_y^* \cos^2 \theta + \\ & + \sin^2 \theta (F_x F_x^* \cos^2 \varphi + F_y F_y^* \sin^2 \varphi + F_x F_y^* \cos \varphi \sin \varphi + F_x F_y^* \cos \varphi \sin \varphi) = \\ & = |F_x|^2 \cos^2 \theta + |F_y|^2 \cos^2 \theta + \\ & + |F_x \sin \theta \cos \varphi + F_y \sin \theta \sin \varphi|^2 = \\ & = \cos^2 \theta |\mathbf{F}_t|^2 + |\mathbf{F}_t \cdot \mathbf{r}_0|^2 \end{aligned}$$

- Il vettore di Poynting vale pertanto:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2\eta} \frac{1}{\lambda^2 r^2} \left[ |\mathbf{F}_t(\hat{\mathbf{k}}_t)|^2 (\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{r}_0)^2 + |\mathbf{F}_t(\hat{\mathbf{k}}_t) \cdot \mathbf{r}_0|^2 \right] \mathbf{r}_0$$

Per antenne sufficientemente direttive il cui diagramma di radiazione è concentrato sull'asse, vale la formula approssimata nel **caso parassiale** ( $\theta \approx 0$ ,  $\sin \theta \approx 0$  e  $\cos \theta \approx 1$ ):

$$\mathbf{P} \approx \frac{1}{2\eta} \frac{\cos^2 \theta}{\lambda^2 r^2} \left[ |\mathbf{F}_t(\hat{\mathbf{k}}_t)|^2 \right] \mathbf{r}_0 \approx \frac{1}{2\eta} \frac{1}{\lambda^2 r^2} \left[ |\mathbf{F}_t(\hat{\mathbf{k}}_t)|^2 \right] \mathbf{r}_0$$

- **L'intensità di radiazione**  $U(\theta, \varphi)$  si scrive dunque in funzione del modulo quadrato di  $\underline{\mathbf{E}}_t$ :

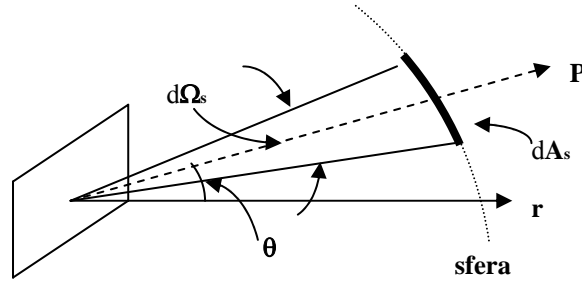
$$U(\theta, \varphi) \equiv \frac{1}{2\eta\lambda^2} |E_o|^2 |\underline{\mathbf{E}}_t(\theta, \varphi)|^2$$

- **L'intensità di radiazione normalizzata** al suo massimo  $U_n(\theta, \varphi)$  si mette invece in relazione alla funzione di radiazione normalizzata  $\underline{\mathbf{F}}_n(\theta, \varphi)$  rispetto al suo massimo valore in modulo  $F_M = \max |\underline{\mathbf{F}}_t|$ . In genere il massimo si ha sull'asse  $\theta=0$ , ovvero  $F_M = \max |\underline{\mathbf{F}}_t| = |\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)|_{\theta=0}$ , per cui:

$$U_n(\theta, \varphi) \equiv \frac{|\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)|^2}{|\underline{\mathbf{F}}_t(0, \varphi)|^2} = \frac{|\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)|^2}{F_M^2} \equiv \underline{\mathbf{F}}_n(\theta, \varphi)$$

#### 4.4.a Calcolo della potenza irradiata

- La potenza irradiata dall'apertura  $W_T$  nel semispazio  $z \geq 0$  si calcola come flusso del vettore di Poynting uscente da una superficie chiusa che racchiude le sorgenti. Si possono fare diverse scelte:



- la superficie  $S$  di una sfera di raggio grande (per poter utilizzare i risultati in zona di Fraunhofer). Ci limitiamo alla semisfera  $S/2$  nel semispazio  $z \geq 0$  in quanto il campo per  $z < 0$  è stato assunto nullo e usiamo la formula approssimata parassiale:

$$W_T = \int_{S/2} P(r, \theta, \varphi) dA_s = \int_{S/2} P(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \int_{2\pi} U(\theta, \varphi) d\Omega_s = \frac{1}{2\eta\lambda^2} \int_{2\pi} |\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)|^2 d\Omega_s$$

- Il piano dell'apertura  $z=0$  chiuso a sinistra dalla sfera all'infinito. Fuori dall'apertura il flusso su tale piano è nullo per l'approssimazione assunta sulla limitatezza della funzione di illuminazione. Il valore del flusso del vettore di Poynting che si ottiene non è a rigore identico a quello precedente e vale:

$$W_T = \frac{1}{2\eta} \int_A |\underline{\mathbf{E}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t, 0)|^2 d^2 \underline{\mathbf{r}}_t = \frac{1}{2\eta} \int_A |\underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t)|^2 d^2 \underline{\mathbf{r}}_t$$

**Nota:**

- ❖ Per il teorema di Parseval, si passa dall'integrazione nel dominio delle variabili spaziali all'integrazione nel dominio delle variabili trasformate e viceversa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{E}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t, z)|^2 d^2 \underline{\mathbf{r}}_t = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{F}}_t(\underline{\mathbf{k}}_t, z)|^2 d^2 \underline{\mathbf{k}}_t$$

Tale teorema stabilisce l'uguaglianza tra l'energia del campo calcolata come integrale della densità di potenza rispetto alle coordinate spaziali, ovvero come integrale della densità spettrale di potenza rispetto alle frequenza (spaziale). Per cui, sul piano  $z=0$  si ha:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{F}}_t(\underline{\mathbf{k}}_t)|^2 d^2 \underline{\mathbf{k}}_t = \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t)|^2 d^2 \underline{\mathbf{r}}_t$$

#### 4.4.b Calcolo della direttività

- Ricordiamo le espressioni del vettore di Poynting derivato con l'approssimazione parassiale e le due espressioni della potenza trasmessa  $W_T$ :

$$\underline{\mathbf{P}} \cong \frac{1}{2\eta} \frac{1}{\lambda^2 r^2} |\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)|^2 \underline{\mathbf{r}}_0$$

$$W_T \cong \frac{1}{2\eta} \int_{\infty} |\underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t)|^2 d^2 \underline{\mathbf{r}}_t \cong \frac{1}{2\eta \lambda^2} \int_{4\pi} |\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$$

- Usando l'espressione di  $W_T$  in termini di  $\underline{\mathbf{F}}_t$ , la direttività può essere espressa in funzione della funzione di radiazione  $\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)$  (estendiamo il dominio di integrazione a  $4\pi$  per uniformità di notazione):

$$D(\theta, \varphi) = \frac{P(r, \theta, \varphi)}{W_T} 4\pi r^2 = \frac{1}{2\eta \lambda^2 r^2} \frac{|\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)|^2 4\pi r^2}{\frac{1}{2\eta \lambda^2} \int_{4\pi} |\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)|^2 d\Omega} = 4\pi \frac{|\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)|^2}{\int_{4\pi} |\underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)|^2 d\Omega}$$

ovvero attraverso la funzione di radiazione normalizzata  $\underline{\mathbf{F}}_{tn}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{F}}_t(\theta, \varphi)/F_M$  rispetto al suo massimo valore in modulo  $F_M = \max|\underline{\mathbf{F}}_t|$ :

$$D(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{|\underline{\mathbf{F}}_{tn}(\theta, \varphi)|^2}{\int_{4\pi} |\underline{\mathbf{F}}_{tn}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega}$$

- Usando il legame di **trasformata di Fourier** tra  $\underline{\mathbf{F}}_t$  e  $\underline{\mathbf{f}}_t$  e l'espressione di  $W_T$  in termini di  $\underline{\mathbf{f}}_t$ , la direttività si esprime anche in funzione della funzione di illuminazione:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\frac{1}{2\eta \lambda^2 r^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t) e^{j\hat{\mathbf{k}}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}_t} d^2 \underline{\mathbf{r}}_t \right|^2}{\frac{1}{2\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t)|^2 d^2 \underline{\mathbf{r}}_t} 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t) e^{j\hat{\mathbf{k}}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}_t} d^2 \underline{\mathbf{r}}_t \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t)|^2 d^2 \underline{\mathbf{r}}_t}$$

### 4.4.c Calcolo dell'area equivalente

- Ricordando la **relazione tra Area equivalente e Direttività**, derivabile dal teorema di reciprocità ed usando il teorema di Parseval:

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}_t} d^2 \underline{\mathbf{r}}_t \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t)|^2 d^2 \underline{\mathbf{r}}_t} = \frac{4\pi^2 |\underline{\mathbf{F}}_t(\hat{\mathbf{k}}_t)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{F}}_t(\mathbf{k}_t)|^2 d^2 \mathbf{k}_t}$$

- Applicando la disuguaglianza di Schwartz si ottiene per il valore massimo dell'Area Equivalente  $A_{eM}$ :

$$A_{eM} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}_t} d^2 \underline{\mathbf{r}}_t \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t)|^2 d^2 \underline{\mathbf{r}}_t} \leq A$$

#### Dimostrazione:

- Ricordiamo la disuguaglianza di Schwartz per due funzioni  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$ :

$$\left| \int_A f(x,y) g(x,y) dx dy \right|^2 \leq \int_A |f|^2 dx dy \cdot \int_A |g|^2 dx dy$$

- Considerando  $g(x,y)=1$  e la funzione  $f(x,y)$  con le componenti  $\underline{\mathbf{f}}_{x,y}(\underline{\mathbf{r}}_t) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}_t}$ ; c.v.d. si ottiene:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}_t} dx dy \right|^2 \leq A \int_A |\underline{\mathbf{f}}_t(\underline{\mathbf{r}}_t) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}_t}|^2 dx dy$$

da cui:

$$A_{eM} \leq A$$

- L'area equivalente  $A_{eM}$  al massimo può essere pari all'area geometrica dell'apertura. Tale uguaglianza si ottiene se l'illuminazione è costante in quanto  $A_{eM}=A^2/A=A$ . Il rendimento d'apertura  $\eta_a = A_{eM}/A$  ha valori che solitamente sono dell'ordine di 0.6-0.7.
- Può accadere che l'Area equivalente sia maggiore dell'area geometrica nelle cosiddette antenne superdirettive le quali però hanno una banda molto stretta.

### 4.4.d Proprietà di normalizzazione di $A_e$ e $D$

- Si deducono facilmente alcune proprietà di normalizzazione della funzione di Direttività e dell'Area equivalente:

$$\int_{4\pi} D(\theta, \varphi) d\Omega = \int_{4\pi} 4\pi \frac{U(\theta, \varphi)}{W_T} d\Omega = 4\pi \frac{W_T}{W_T} = 4\pi$$

$$\int_{4\pi} A_e(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_{4\pi} D(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{\lambda^2}{4\pi} 4\pi = \lambda^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_e(\hat{\mathbf{k}}_t) d^2 \hat{\mathbf{k}}_t = \frac{4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{F}}_t(\hat{\mathbf{k}}_t)|^2 d^2 \hat{\mathbf{k}}_t}{\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathbf{F}}_t(\hat{\mathbf{k}}_t)|^2 d^2 \hat{\mathbf{k}}_t} = 4\pi^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(\hat{\mathbf{k}}_t) d^2 \hat{\mathbf{k}}_t = \frac{4\pi}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} A_e(\hat{\mathbf{k}}_t) d^2 \hat{\mathbf{k}}_t = \frac{4\pi}{\lambda^2} 4\pi^2 = \frac{16\pi^3}{\lambda^2}$$

#### 4.4.e Formule approssimate di angolo solido di radiazione e direttività

- Ricordiamo la definizione di angolo solido di radiazione  $\Omega_p$  ed il legame con la direttività:

$$\Omega_p = \int_{4\pi} U_n(\theta, \varphi) d\Omega_s = \int_{4\pi} |\underline{\mathbf{F}}_{tn}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega_s$$

da cui

$$D(\theta, \varphi) = \frac{|\underline{\mathbf{F}}_{tn}(\theta, \varphi)|^2}{\frac{1}{4\pi} \Omega_p} \Rightarrow D_M = \frac{4\pi}{\Omega_p}$$

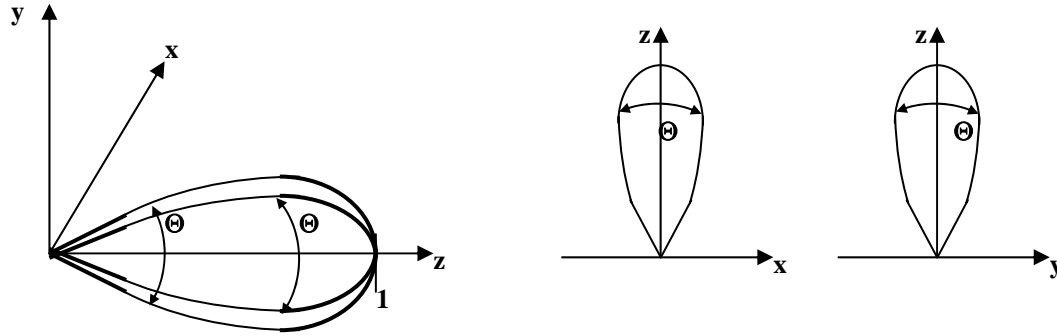
- Considerando l'angolo solido che racchiude il lobo principale (*main lobe*)  $\Omega_{ML}$  e quello che racchiude i lobi secondari (*side lobe*)  $\Omega_{SL}$  si introducono l'**efficienza di lobo principale**  $\eta_{ML} = \Omega_{ML}/\Omega_p$  ed il **fattore di dispersione**  $\eta_{SL} = \Omega_{SL}/\Omega_p$  per i quali sussiste:

$$\Omega_p = \Omega_{ML} + \Omega_{SL} \Rightarrow \eta_{ML} + \eta_{SL} = 1$$

#### 1) Caso di diagramma di radiazione a pennello

Consideriamo un'antenna il cui diagramma di radiazione è un solido di rotazione intorno all'asse  $z$  (*diagramma a pennello*) e simmetrico nei due piani principali  $\varphi=0$  e  $\varphi=\pi/2$  (vedi figura). Per antenna molto direttiva la larghezza del lobo a 3dB pari a  $\Theta_{3dB}=\Theta$  (in radianti) è piccola. Consideriamo la

funzione di radiazione normalizzata unitaria entro  $\Theta$  e nulla fuori ( $|\mathbf{E}_n|^2=1$  per  $\theta<\Theta/2$  e  $|\mathbf{E}_n|^2=0$  per  $\theta>\Theta/2$ ). Si ricava la seguente formula approssimata per l'angolo solido di radiazione:



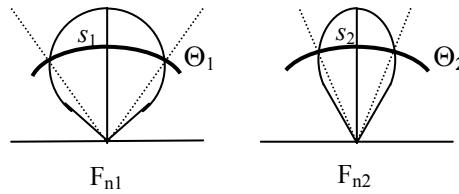
$$\Omega_p \approx \int_0^{\frac{\Theta}{2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \cos \theta \Big|_{\Theta/2}^0 = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\Theta}{2}\right) \approx 2\pi \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi}{4} \Theta^2$$

Ricordando il legame tra  $D_M$  e  $\Omega_p$  si ottiene la formula approssimata per la direttività massima:

$$D_M = \frac{4\pi}{\Omega_p} \approx \frac{16}{\Theta^2}$$

## 2) Caso di diagramma di radiazione a ventaglio fattorizzabile

Se l'antenna ha le larghezze del lobo a 3dB sui due piani diverse e pari a  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  (in radianti) che assumiamo piccole, vale la seguente formula approssimata:



$$\Omega_p = \int_{4\pi} |F_n(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = \int_{\Delta S} |F_n(\theta, \varphi)|^2 \frac{dS}{r^2} \cong \frac{\Delta S}{r^2}$$

Ma si può approssimare  $\Delta S$  attraverso un rettangolo con lati pari agli archi sottesi da  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  di lato pari  $r$  (distanza di osservazione in campo lontano), i.e.:

$$\Delta S \cong s_1 s_2 = (\Theta_1 r)(\Theta_2 r) = \Theta_1 \Theta_2 r^2$$

da cui:

$$\Omega_p \cong \Theta_1 \cdot \Theta_2 \quad \Rightarrow \quad D_M \cong \frac{4\pi}{\Theta_1 \cdot \Theta_2}$$

Tale approssimazione trascura i lobi laterali e non tiene conto della effettiva forma del diagramma di radiazione e deve essere quindi usata con cautela. Possono essere introdotti fattori empirici correttivi in funzione della forma della funzione di illuminazione ( $k_p=1$  per illuminazione uniforme) e dell'efficienza del lobo principale ( $\eta_{ML}\approx 0.75$  per molte antenne di grandi dimensioni) con la formula:

$$D_M \approx \frac{4\pi\eta_{ML}}{k_p \Theta_{rad1} \cdot \Theta_{rad2}} \approx \frac{41253 \eta_{ML}}{k_p \Theta_{deg1} \cdot \Theta_{deg2}}$$

### 3) Caso di diagramma di radiazione a ventaglio sommabile

- Assumiamo la funzione di radiazione sia pari a  $F^{(x)}(\theta,0)=F_{n1}(\theta)$  per  $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$  e  $3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$  mentre sia pari a  $F^{(y)}(\theta,\pi/2)=F_{n2}(\theta)$  altrove. Entrambe sono unitarie entro le larghezze a 3dB del lobo principale sui due piani, che indichiamo con  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  (in radianti) e che assumiamo piccole:

$$F_{n1}(\theta,0) = \begin{cases} 1 & |\theta| < \Theta_1 \\ 0 & |\theta| > \Theta_1 \end{cases} \quad F_{n2}(\theta,\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 1 & |\theta| < \Theta_2 \\ 0 & |\theta| > \Theta_2 \end{cases}$$

L'angolo solido di radiazione vale dunque:

$$\begin{aligned} \Omega_p = \int_{4\pi} |\mathbf{F}_n(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi \approx & \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi} |F_{n1}(\theta)|^2 \sin \theta d\theta + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi} |F_{n1}(\theta)|^2 \sin \theta d\theta + \\ & + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi} |F_{n2}(\theta)|^2 \sin \theta d\theta + \int_{5\pi/4}^{7\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi} |F_{n2}(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

E si ottengono altre formule approssimate per l'angolo solido di radiazione e Direttività massima:

$$\Omega_p \cong \pi \int_0^{\Theta_1/2} \sin \theta d\theta + \pi \int_0^{\Theta_2/2} \sin \theta d\theta \cong \pi \frac{1}{2} \left( \frac{\Theta_1}{2} \right)^2 + \pi \frac{1}{2} \left( \frac{\Theta_2}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{8} (\Theta_1^2 + \Theta_2^2)$$

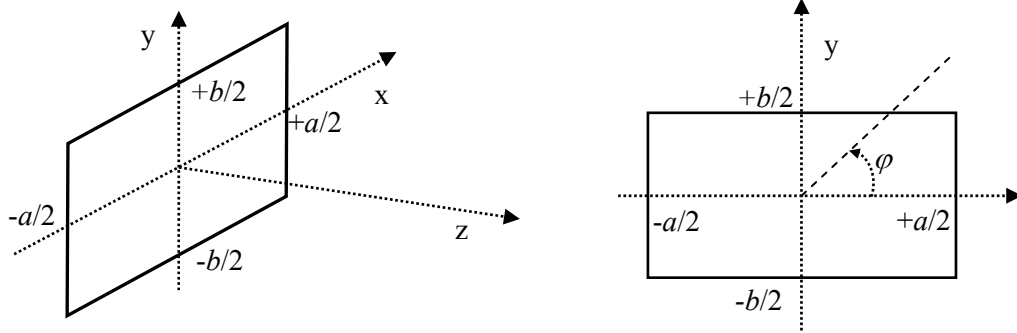
da cui

$$D_M \cong \frac{32}{\Theta_1^2 + \Theta_2^2}$$

- La medesima formula si ottiene assumendo  $F_n(\theta, \varphi) = F_{n1}(\theta) \cos^2 \varphi + F_{n2}(\theta) \sin^2 \varphi$

## 4.5 APERTURE RETTANGOLARI

- Consideriamo aperture rettangolari sul piano  $z=0$ , di dimensioni  $a$  lungo  $x$  e  $b$  lungo  $y$  come indicato in figura.



### 4.5.a Aperture con funzione di illuminazione fattorizzabile

- Consideriamo un'apertura rettangolare in cui le componenti della funzione di illuminazione  $f_{x,y}(x,y)$  possano essere espresse come prodotto di due funzioni, una della sola variabile  $x$  ed una della sola variabile  $y$ :

$$f_{x,y}(x,y) = f_{x,y}^{(x)}(x) \cdot f_{x,y}^{(y)}(y)$$

- La funzione di radiazione risulta anche essa fattorizzabile:

$$F_{x,y}(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}^{(x)}(x) e^{jk_o \sin \theta \cos \varphi x} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}^{(y)}(y) e^{jk_o \sin \theta \sin \varphi y} dy = F_{x,y}^{(x)}(\theta, \varphi) \cdot F_{x,y}^{(y)}(\theta, \varphi)$$

- I due diagrammi di radiazione sui due piani  $\varphi=0$  (piano  $x-z$ ) e  $\varphi=\pi/2$  (piano  $y-z$ ) sono spesso considerati per caratterizzare l'antenna piuttosto che il solido di radiazione tridimensionale:

$$F_{x,y}(\theta, \varphi=0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}^{(y)}(y) dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}^{(x)}(x) e^{jk_o \sin \theta x} dx$$

$$F_{x,y}\left(\theta, \varphi=\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}^{(x)}(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}^{(y)}(y) e^{jk_o \sin \theta y} dy$$

- Nel seguito ci limiteremo al caso di campo elettrico di illuminazione polarizzato linearmente lungo l'asse  $y$ , ovvero  $f_y(x,y) \neq 0$  mentre  $f_x(x,y)=0$ . Per funzioni di illuminazione fattorizzabili, si scrive  $f_y(x,y) = f_y^{(x)}(x) f_y^{(y)}(y)$

**Nota:**

- Per illuminazione polarizzata linearmente con il campo elettrico diretto lungo  $y$ , quello magnetico è diretto lungo  $x$ . I tagli del lobo di radiazione ortogonali si identificano anche come tagli sul piano che

contiene il campo elettrico (piano di E) ovvero per  $\varphi=\pi/2$  in figura e tagli sul piano che contiene il campo H (piano di H) ovvero  $\varphi=0$ .

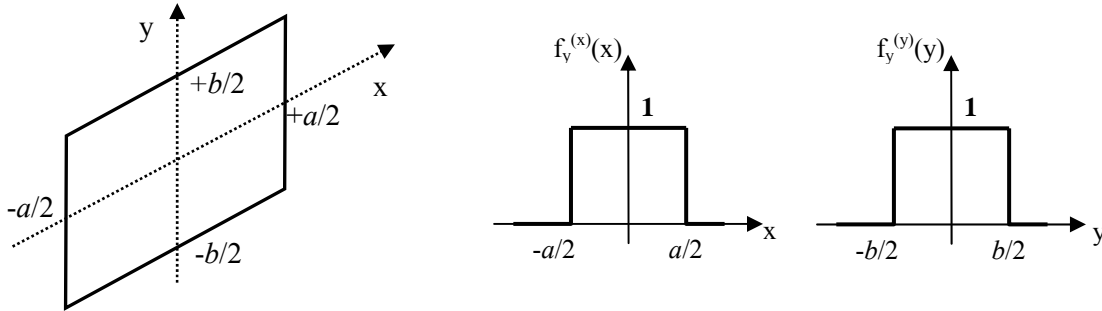
- Per una funzione di illuminazione con polarizzazione ellittica generica, avremo:

$$\underline{f}(x,y) = f_x(x,y)\underline{x}_0 + j f_y(x,y)\underline{y}_0$$

ovvero rappresentativa di un vettore complesso con parte reale  $f_x(x,y)$  e parte immaginaria  $f_y(x,y)$ .

### 4.5.b Illuminazione uniforme

- La funzione di illuminazione  $f_y(x,y)$  è costante (pari a 1, per semplicità) in  $-a/2 < x < a/2$  e  $-b/2 < y < b/2$ ,  $a$  e  $b$  sono le dimensioni dell'apertura lungo  $x$  e  $y$ . Pertanto sono funzioni rettangolari con base  $a$  e  $b$ , rispettivamente.



- La funzione rettangolare  $\Pi(x)$  con base unitaria e la funzione *sinc* sono così definite:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & -1/2 < x < 1/2 \\ 0 & x < -1/2; x > 1/2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{sinc}(y) \equiv \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}$$

- La trasformata di Fourier di una funzione rettangolare  $\Pi(x)$  con base unitaria è la funzione  $\text{sinc}(k/2\pi)$ :

$$\text{sinc} \frac{k}{2\pi} = \mathfrak{F}\{\Pi(x)\} \Rightarrow \text{sinc} \frac{k}{2\pi} = \frac{\sin \pi \frac{k}{2\pi}}{\pi \frac{k}{2\pi}} = \frac{\sin \frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}$$

- Per apertura di dimensioni  $a$  e  $b$  la funzione di illuminazione  $f_y(x,y) = f_y^{(x)}(x) f_y^{(y)}(y) = \Pi(x/a) \Pi(y/b)$  e quella di radiazione  $F_y(x,y) = F_y^{(x)}(k_x) F_y^{(y)}(k_y)$  valgono:

$$f_y^{(x)}(x) = \Pi\left(\frac{x}{a}\right) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{a \cdot \sin c \frac{ak_x}{2\pi} = a \frac{\sin a \frac{k_x}{2}}{a \frac{k_x}{2}}\right\} = \mathfrak{F}^{-1}\{F_y^{(x)}(k_x)\}$$

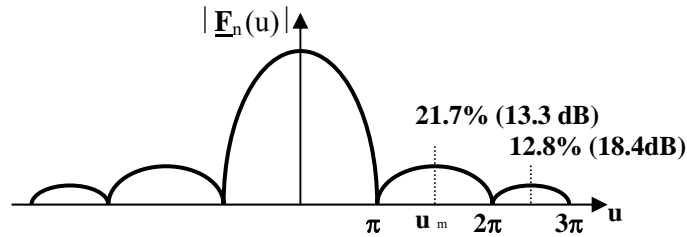
$$f_y^{(y)}(y) = \Pi\left(\frac{y}{b}\right) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{b \cdot \sin c \frac{bk_y}{2\pi} = b \frac{\sin b \frac{k_y}{2}}{b \frac{k_y}{2}}\right\} = \mathfrak{F}^{-1}\{F_y^{(y)}(k_y)\}$$

□ La funzione di radiazione per  $k_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi$  e  $k_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi$ , si scrive

$$F_y(\theta, \varphi) = F_y(\underline{\mathbf{k}}) \Big|_{\underline{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{k}}} = ab \cdot \text{sinc}\left(\frac{a \sin \theta \cos \varphi}{\lambda}\right) \text{sinc}\left(\frac{b \sin \theta \sin \varphi}{\lambda}\right) = a \frac{\sin(u)}{u} \cdot b \frac{\sin(v)}{v} = F_y^{(x)}(u) F_y^{(y)}(v)$$

dove le **variabili di radiazione**  $u$  e  $v$  sono definite da:

$$u = \frac{\pi a \sin \theta \cos \varphi}{\lambda} \quad v = \frac{\pi b \sin \theta \sin \varphi}{\lambda}$$



□ I diagrammi nei due piani principali  $\varphi=0$  (piano di H) e  $\varphi=\pi/2$  (piano di E) sono:

$$F_y(\theta, 0) = ab \cdot \text{sinc}\left(\frac{a \sin \theta}{\lambda}\right) = ab \cdot \frac{\sin(u)}{u} \quad F_y\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = ab \cdot \text{sinc}\left(\frac{b \sin \theta}{\lambda}\right) = ab \cdot \frac{\sin(v)}{v}$$

La funzione  $\sin(u)/u$  ha l'andamento in figura. Nell'origine tende ad uno ed ha zeri nei punti  $u=\pm n\pi$  e massimi relativi approssimativamente nei punti dove è massimo il numeratore ovvero  $u=\pm(3/2+m)\pi$ .

□ L'ampiezza del lobo principale tra i due nulli si ricava cercando l'angolo  $\theta_1$  a cui corrisponde il primo nullo. Sul piano di H ciò accade per  $u=u_1=\pi$  e pertanto:

$$u_1 = \pi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_1 \Rightarrow \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \theta_1 \approx \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \Theta_{NN} = \frac{2\lambda}{a}$$

□ L'ampiezza del lobo a metà potenza si ricava cercando il valore di  $u$  per cui la funzione  $\sin(u)/u$  vale 0.707 (ovvero,  $\text{sinc}^2(u)=1/2$ ). Questo avviene per  $u=u_2=1.391$  (si verifica facilmente) e pertanto sul piano di H (identiche relazioni valgono sul piano di E):

$$u_2 = 1.39 = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_{3dB} \Rightarrow \sin \theta_{3dB} = \frac{1.39\lambda}{\pi a} \Rightarrow \theta_{3dB} \approx \frac{1.39\lambda}{\pi a} \Rightarrow \Theta_{3dB} = 0.88 \frac{\lambda}{a}$$

- L'ampiezza dei lobi laterali richiede di ricavare il massimo relativo con la condizione che la derivata si annulli ovvero, con riferimento al diagramma  $F(\theta, 0)$  sul piano di H:

$$\left. \frac{d}{du} \frac{\sin u}{u} \right|_{u=u_m} = 0 \Rightarrow \frac{u_m \cos(u_m) - \sin(u_m)}{u_m^2} = 0 \Rightarrow$$

$$u_m \cos(u_m) - \sin(u_m) = 0 \Rightarrow u_m = \tan u_m \Rightarrow \begin{cases} u_{m1} = 4.51 \\ u_{m2} = 7.43 \end{cases}$$

Approssimativamente tali punti coincidono con quelli in cui è massimo il numeratore. Con riferimento al diagramma  $F(\theta, 0)$  sul piano di H e al diagramma  $F(\theta, \pi/2)$  sul piano di E si ottiene per entrambi che il primo massimo (escluso  $n=\pi/2$ ) di  $\sin(u)$  si ha per  $u_m = v_m \approx 3\pi/2 = 4.71$  e pertanto:

$$\left. \frac{F_y(\theta, 0)}{F_y(0, 0)} \right|_{u=u_m} = \left. \frac{F(\theta, \pi/2)}{F(0, 0)} \right|_{v=v_3} \approx \frac{1}{ab} ab \cdot \frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2} = \frac{2}{3\pi} = 0.212$$

Quindi, il livello dei lobi secondari SLL è pari a (il valore esatto è di  $-13.27$  dB):

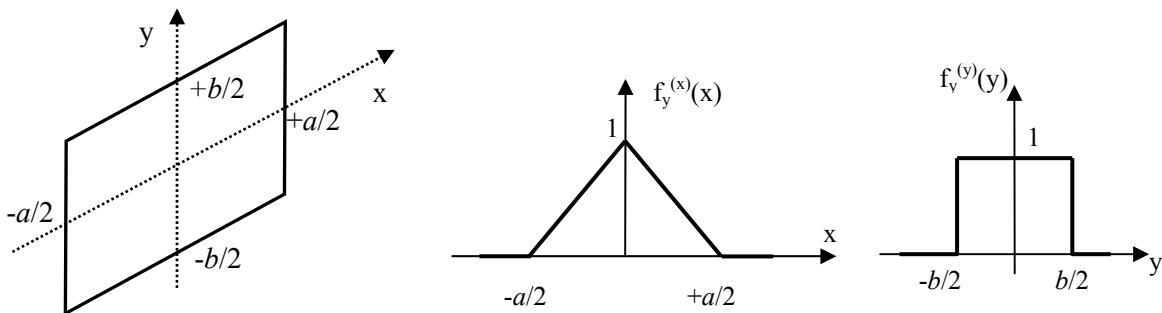
$$\text{SLL}_{\text{dB}} \approx 20 \log \frac{2}{3\pi} = -13.46 \text{ dB}$$

- La direttività massima dell'antenna si ricava facilmente dalle formule che esprimono la potenza  $W_r$  attraverso l'apertura (notare l'integrale di una costante a denominatore):

$$D_M = \frac{4\pi^2 P(\theta=0)}{W_r} = \frac{4\pi^2 \frac{1}{2\eta} \frac{1}{\lambda^2 r^2} \left[ |\mathbf{E}_t(0,0)|^2 \right]}{\frac{1}{2\eta} \int_A |\mathbf{f}_t(x,y)|^2 dx dy} = \frac{4\pi^2 \frac{1}{2\eta \lambda^2 r^2} (ab)^2}{\frac{1}{2\eta} ab} = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab \Rightarrow A_e = ab$$

### 4.5.c Illuminazione triangolare

- La funzione di illuminazione  $f_y(x,y) = f_y^{(x)}(x) f_y^{(y)}(y)$  è triangolare rispetto a  $x$  nell'intervallo  $-a/2 < x < a/2$  mentre è costante rispetto a  $y$  nell'intervallo  $-b/2 < y < b/2$ , dove  $a$  e  $b$  sono le dimensioni dell'apertura.



- Una funzione triangolare  $\Lambda(x)$  di base 1 è la convoluzione di due funzioni rettangolari di base  $1/2$  e quindi la trasformata di Fourier è una funzione  $\text{sinc}^2(\cdot)$ , ovvero:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \quad \text{ovvero:} \quad \Lambda(x) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{x}{1/2}\right) \otimes \Pi\left(\frac{x}{1/2}\right)$$

che nel dominio della frequenza diventa:

$$\Lambda(x) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ 2 \frac{1}{2} \sin c \left( \frac{k/2}{2\pi} \right) \frac{1}{2} \sin c \left( \frac{k/2}{2\pi} \right) = \frac{1}{2} \sin c^2 \left( \frac{k}{4\pi} \right) \right\}$$

- Per l'apertura di dimensioni  $a$  e  $b$  poniamo  $f_y(x,y) = f_y^{(x)}(x) f_y^{(y)}(y) = \Lambda(x/a) \Pi(y/b)$ . Sul piano di E vale quanto già ricavato nel caso precedente, sul piano di H si ricava:

$$f_y^{(x)}(x) = \Lambda\left(\frac{x}{a}\right) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{a}{2} \cdot \sin c^2 \frac{ak}{4\pi} \right\}$$

- La funzione di radiazione per  $k_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi$  e  $k_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi$  si scrive introducendo le variabili di radiazione  $u$  e  $v$  già definite.

$$F_y(\theta, \varphi) = F_y(\underline{\mathbf{k}}) \Big|_{\underline{\mathbf{k}} = \underline{\hat{\mathbf{k}}}} = \frac{ab}{2} \cdot \sin c^2 \left( \frac{a \sin \theta \cos \varphi}{2\lambda} \right) \sin c \left( \frac{b \sin \theta \sin \varphi}{\lambda} \right)$$

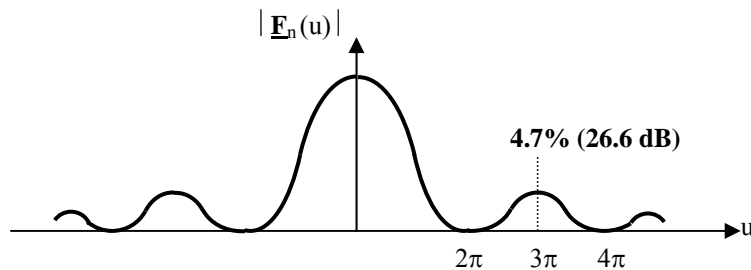
che si può scrivere come:

$$F_y(\theta, \varphi) = \frac{a}{2} \left( \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}} \right)^2 \cdot b \frac{\sin(v)}{v} = F_y^{(x)}(u) F_y^{(y)}(v)$$

i cui tagli sui piani principali sono dati da:

$$F_y(\theta, 0) = \frac{ab}{2} \cdot \text{sinc}^2 \left( \frac{a \sin \theta}{2\lambda} \right) \quad F_y\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{ab}{2} \cdot \text{sinc} \left( \frac{b \sin \theta}{\lambda} \right)$$

- La funzione  $[\sin(u/2)/u/2]^2$  ha l'andamento in figura. Nell'origine tende ad uno ed ha zero nei punti  $u/2 = \pm n\pi$  e massimi relativi approssimativamente nei punti dove è massimo il numeratore ovvero  $u/2 = \pm(3/2 + m)\pi$ .



- L'ampiezza del lobo principale tra i due nulli si ricava cercando l'angolo  $\theta_1$  a cui corrisponde il primo nullo. Ciò accade per  $u = u_1 = 2\pi$  e pertanto:

$$u_1 = 2\pi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_1 \Rightarrow \sin \theta_1 = \frac{2\lambda}{a} \Rightarrow \theta_1 \approx \frac{2\lambda}{a} \Rightarrow \Theta_{NN} = \frac{4\lambda}{a}$$

- L'ampiezza del lobo a metà potenza sul piano di H si ricava cercando il valore di  $u$  per cui la funzione  $\text{sinc}^2(\cdot)$  vale 0.707. E' facile verificare che questo avviene per  $u/2=u_2/2=1.002$  e pertanto:

$$\frac{u_2}{2} = 1.002 = \frac{\pi a}{2\lambda} \sin \theta_{3dB} \Rightarrow \sin \theta_{3dB} \cong \frac{2\lambda}{\pi a} \Rightarrow \theta_{3dB} \approx 0.64 \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \Theta_{3dB} = 1.28 \frac{\lambda}{a}$$

- L'ampiezza dei lobi laterali approssimativamente si ottiene quando è massimo il numeratore. Con riferimento al diagramma  $F(\theta, 0)$  sul piano di H il primo massimo di  $\sin(u/2)$  si ha per  $u_m/2=3\pi/2$  e pertanto (sul piano di E invece si hanno le stesse relazioni del caso di illuminazione uniforme):

$$\left. \frac{F_y(\theta, 0)}{F_y(0, 0)} \right|_{u=u_m} \approx \frac{1}{ab} ab \cdot \left( \frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2} \right)^2 = \left( \frac{2}{3\pi} \right)^2 = 0.045$$

Il livello SLL dei lobi secondari è dato da (il valore esatto è di -24.4 dB):

$$\text{SLL}_{dB} \approx 20 \log \left( \frac{2}{3\pi} \right)^2 = -26.9 \text{ dB}$$

- La Direttività e l'Area Equivalente valgono (l'integrale del quadrato del triangolo a denominatore è di facile determinazione):

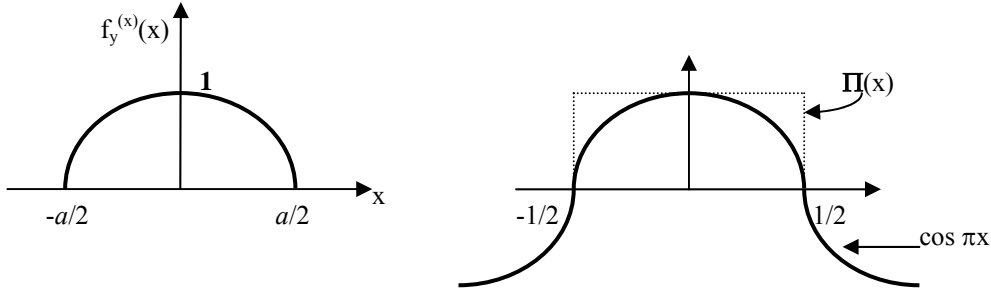
$$D_M = \frac{4\pi^2 P(\theta=0)}{W_r} = \frac{4\pi^2 \frac{1}{2\eta} \frac{1}{\lambda^2 r^2} \left[ |\mathbf{E}_t(0,0)|^2 \right]}{\frac{1}{2\eta} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \Lambda^2(x/a) dx dy} = \frac{4\pi^2 \frac{1}{2\eta \lambda^2 r^2} \left( \frac{ab}{2} \right)^2}{\frac{1}{2\eta} \frac{ab}{3}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{3ab}{4} \Rightarrow A_e = \frac{3}{4} ab$$

**Nota:**

- Il primo lobo laterale è molto più attenuato rispetto al caso uniforme. Questo però avviene a scapito di un'allargamento della larghezza del lobo principale tra i due nulli che viene raddoppiata. Per le caratteristiche della funzione  $\text{sinc}^2$  (che tende a restringersi verso l'alto) la larghezza del lobo a 3dB è maggiore ma solo del 50% circa.

#### 4.5.d Illuminazione cosinusoidale (guida d'onda troncata)

- Consideriamo una guida d'onda rettangolare in cui si propaga il modo fondamentale  $\text{TE}_{10}$  e supponiamo di troncare la guida. L'apertura così realizzata ha un campo di illuminazione che viene assunto pari al campo che si avrebbe in quella sezione se la guida fosse infinita, ovvero il campo del modo  $\text{TE}_{10}$ . Esso è un'onda piana con il campo elettrico diretto lungo  $y$  (lato piccolo della guida) funzione della sola  $x$ .
- La funzione di illuminazione  $f_y(x, y)$  pertanto dipende da  $x$  come una funzione coseno nell'intervallo  $-a/2 < x < a/2$  ed è nulla fuori dell'intervallo. Può essere pertanto espressa come una funzione coseno moltiplicata per una funzione rettangolo di larghezza  $a$ .



- La funzione coseno ha come trasformata di Fourier una coppia di Distribuzioni di Dirac mentre la funzione rettangolo ha come trasformata una funzione *sinc*:

$$\cos(\pi x) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \delta(k - \pi) + \frac{1}{2} \delta(k + \pi) \right\} \quad \text{essendo} \quad \Pi(x) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \text{sinc} \frac{k}{2\pi} \right\}$$

- Per l'apertura di dimensioni  $a$  e  $b$  poniamo  $f_y(x,y) = f_y^{(x)}(x) f_y^{(y)}(y) = \cos(\pi x/a) \Pi(x/a) \Pi(y/b)$ . Mentre nella direzione  $y$  vale quanto già ricavato nei casi precedenti, nella direzione  $x$  risulta per la nota proprietà della trasformata del prodotto:

$$f_y^{(x)}(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \Pi\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow \mathfrak{F}\{f_y^{(x)}(x)\} = \mathfrak{F}\left\{\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right\} \otimes \mathfrak{F}\left\{\Pi\left(\frac{x}{a}\right)\right\}$$

ovvero:

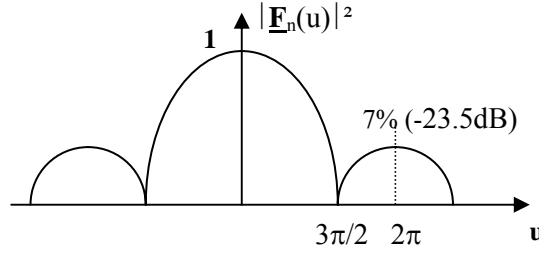
$$\mathfrak{F}\{f_y^{(x)}(x)\} = F_y(\theta, \varphi) = \left[ \frac{1}{2} \delta\left(k - \frac{\pi}{a}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(k + \frac{\pi}{a}\right) \right] \otimes \left[ a \text{sinc}\left(\frac{ak}{2\pi}\right) \right]$$

Da cui:

$$\begin{aligned} F_y(\theta, \varphi) = F_y(\underline{\mathbf{k}})_{\underline{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{k}}} &= \frac{\pi a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi a \sin \theta \cos \varphi}{\lambda}\right)^2} b \sin c\left(\frac{b \sin \theta \sin \varphi}{\lambda}\right) = \\ &= \left[ \frac{\pi a}{2} \frac{\cos u}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - u^2} \right] \left[ b \frac{\sin(v)}{v} \right] = F_y^{(x)}(u) F_y^{(y)}(v) \end{aligned}$$

- Nei piani principali, si ha:

$$F_y(\theta, 0) = \frac{\pi a b}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)^2} \quad F_y\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi a b}{2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{b \sin \theta}{\lambda}\right)$$



- La funzione normalizzata  $(\pi/2a)F_y^{(x)}(u)$  ha l'andamento in figura. Per  $u=0$  vale 1 mentre, per  $u=\pi/2$  ha limite finito. Il primo nullo si ha quando  $u=u_1=3\pi/2$  da cui:

$$u_1 = \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_1 \Rightarrow \sin \theta_1 = \frac{3\lambda}{2a} \Rightarrow \theta_1 \approx \frac{3\lambda}{2a} \Rightarrow \Theta_{NN} = \frac{3\lambda}{a}$$

- L'ampiezza del lobo a metà potenza sul piano di H si ricava cercando il valore di  $u$  per cui la funzione vale 0.707. Questo avviene per  $u=u_2=1.868$  e pertanto:

$$u_2 = 1.868 = \frac{\pi a}{2\lambda} \sin \theta_{3dB} \Rightarrow \sin \theta_{3dB} \approx 0.59 \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \theta_{3dB} \approx 0.59 \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \Theta_{3dB} = 1.2 \frac{\lambda}{a}$$

- Il primo lobo laterale si ottiene approssimativamente quando è massimo il numeratore. Sul piano di H il primo massimo si ha per  $u_m=2\pi$  e riferendosi ai valori assoluti si ottiene:

$$\left. \frac{F_y(\theta,0)}{F_y(0,0)} \right|_{u=u_m} \approx \frac{1}{\frac{2ab}{\pi}} \frac{\pi ab}{2} \cdot \frac{1}{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (2\pi)^2} = \frac{\pi^2}{4} \frac{4}{15\pi^2} = 1/15$$

da cui:

$$SLL_{dB} \approx -20 \log 15 = -23.5 \text{ dB}$$

- La Direttività massima e l'Area Equivalente (l'integrale del  $\cos^2(\cdot)$  a denominatore è di facile calcolo):

$$D_M = \frac{4\pi r^2 P(\theta=0)}{W_T} = \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2\eta} \frac{1}{\lambda^2 r^2} \left[ |E_t(0,0)|^2 \right]}{\frac{1}{2\eta} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx dy} = \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2\eta \lambda^2 r^2} \left( \frac{2ab}{\pi} \right)^2}{\frac{1}{2\eta} \frac{ab}{2}}$$

da cui:

$$D_M = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{8ab}{\pi^2} = \frac{32ab}{\lambda^2 \pi} \Rightarrow A_e = \frac{8ab}{\pi^2}$$

### Nota

- Abbiamo ottenuto una situazione intermedia rispetto alle illuminazioni uniformi e triangolari in termini di larghezza del lobo principale e ampiezza dei lobi laterali.