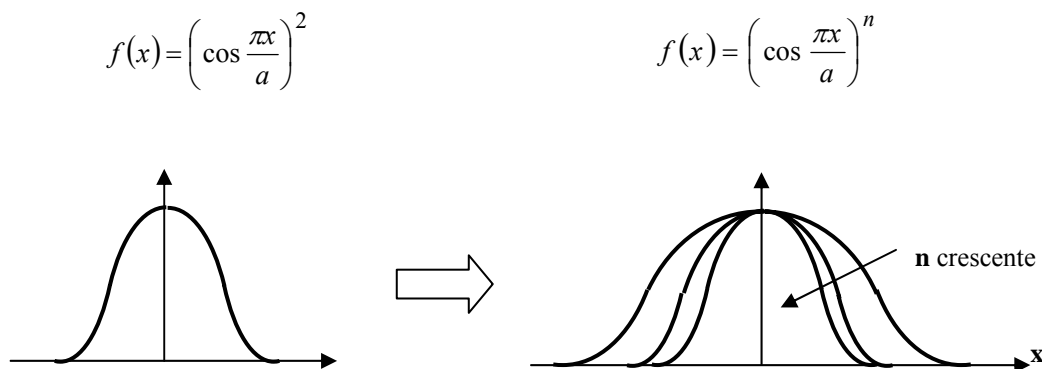


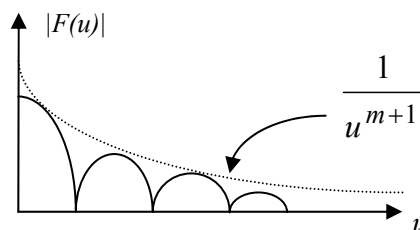
4.5.e Effetto della rastremazione delle funzioni di illuminazione

- Larghezza del lobo principale e livello dei lobi secondari sono grandezze antagoniste. Cambiando la funzione di illuminazione, all'aumentare di una diminuisce l'altra. Le funzioni di illuminazione che hanno lobi laterali inferiori, ma ampiezza del lobo principale maggiore sono quelle con una forma rastremata alle estremità dell'antenna. La funzione rettangolare è la meno rastremata e presenta i maggiori lobi laterali ed il lobo principale più stretto.
- Matematicamente la rastremazione è l'ordine m della prima derivata che risulta essere discontinua alle estremità dell'apertura. Nei casi di illuminazione esaminati si ha:
 - ❖ illuminazione uniforme: la funzione stessa è discontinua e cioè $m = 0$;
 - ❖ illuminazione triangolare e cosinusoidale: la discontinuità si manifesta sulla derivata di ordine $m = 1$.
 - ❖ Illuminazione coseno elevato alla n : l'ordine della derivata discontinua è $m = n$ e al crescere di n la funzione assume una forma sempre più rastremata alle estremità, a cui corrisponde una diminuzione dei lobi laterali ed un allargamento del lobo principale (si veda figura).



- Più in generale vale la seguente proprietà della trasformata di Fourier di una funzione F avente la derivata di ordine m discontinua:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{m+1} F(u) = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) \cong \frac{1}{u^{m+1}}$$



Applicata alla funzione di illuminazione di un'antenna, tale proprietà fornisce la maniera in cui la funzione di radiazione va a zero quando la variabile di radiazioni u va all'infinito, ovvero lontano dalla direzione del massimo del diagramma di radiazione (in genere corrispondente a $u=0$):

4.5.f Effetto di variazione di fase sull'apertura

Variazioni di fase lineare

- ❑ Consideriamo una funzione di illuminazione complessa con fase che lineare sull'apertura. Ad esempio, per semplicità consideriamo una funzione di illuminazione fattorizzabile con polarizzazione y del tipo:

$$f_y^{(x)}(x) = f'(x)e^{j\gamma x} = f'(x)e^{j(k_0 \sin \theta_0)x}$$

- ❑ Il gradiente di fase costante è assunto pari a $\gamma = k_0 \sin \theta_0$ in quanto nelle antenne ad apertura una illuminazione con fase lineare equivale ad illuminare l'apertura con un'onda piana che si propaga in una direzione formante un angolo θ_0 rispetto all'asse normale all'apertura
- ❑ Applicando una nota proprietà di traslazione delle trasformata di Fourier, la funzione di radiazione sul piano $\varphi=0$, ovvero in $\hat{k}_x = k_0 \sin \theta$, diventa:

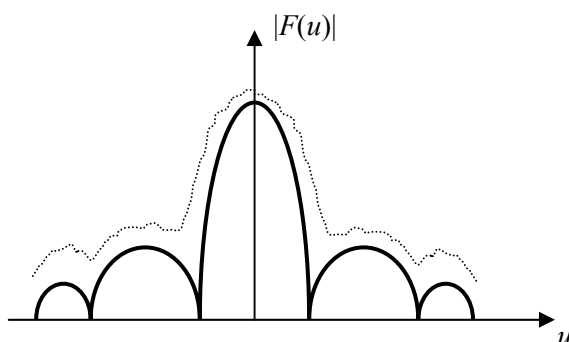
$$F(\theta, 0) = cF^{(x)}(u) = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jk_x x + j\gamma x} dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jk_0(\sin \theta_0 + \sin \theta)x} dx = cF'(u + u_0)$$

dove $u_0 = (\pi a / \lambda) \sin \theta_0$ e c è l'integrale del fattore $f_y^{(y)}(y)$.

- ❑ Una **variazione lineare di fase** determina una traslazione della funzione di radiazione nella variabile u di una quantità u_0 . Il puntamento dell'antenna risulta variato senza che ci sia stato alcun tipo di spostamento meccanico, ovvero si ottiene una **scansione di tipo elettronico** del fascio d'antenna.
- ❑ Si osserva che la traslazione nella variabile u (proporzionale a $\sin \theta$) non è equivalente ad una rotazione meccanica dell'antenna che implica, invece, una traslazione nella variabile angolare θ (**scansione meccanica**). Tale differenza si ripercuote nella *deformazione* del diagramma di radiazione nel caso di scansione elettronica come è facile verificare graficamente mediante il cerchio di visibilità (vedi par. seguente). Tale deformazione del fascio non si presenta nel caso di scansione meccanica.

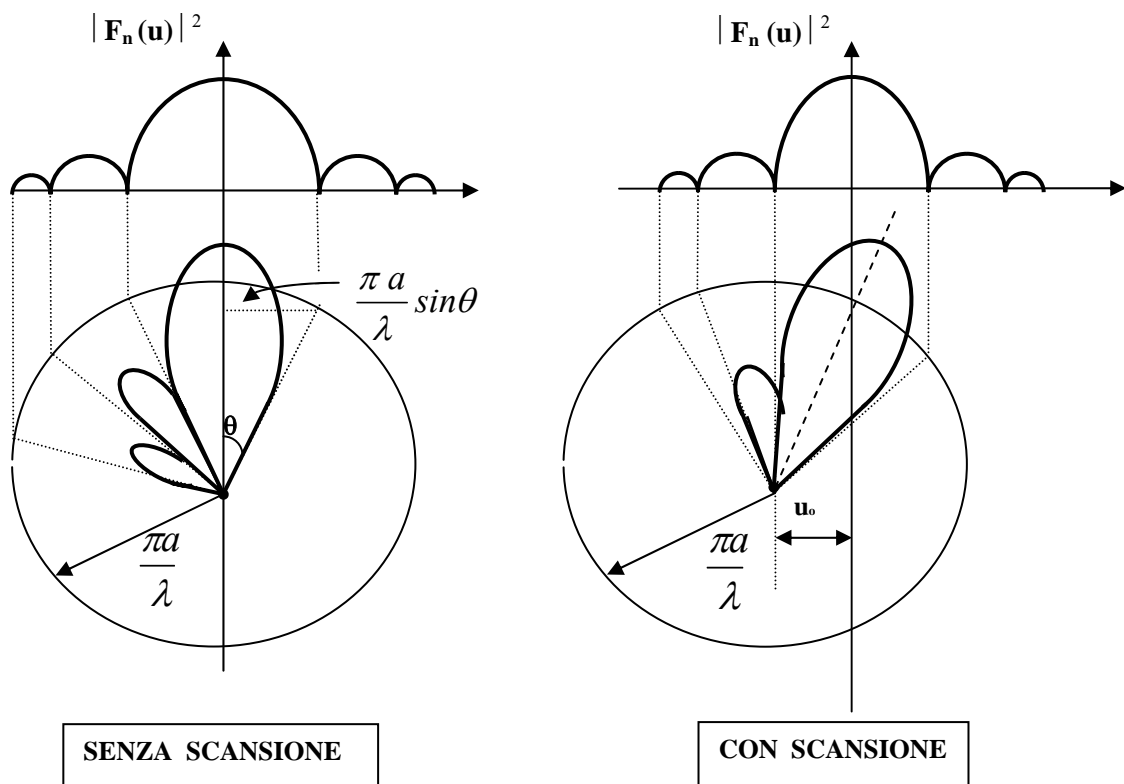
Variazioni di fase casuali

- ❑ Variazioni casuali di fase hanno come conseguenza principale un allargamento del lobo principale ed un innalzamento dei lobi secondari con scomparsa dei valori nulli nel diagramma di radiazione (grafico tratteggiato nel diagramma in figura). Variazioni casuali della fase sono in genere dovute alla rugosità delle superfici della struttura dell'antenna (ad esempio le superfici di un riflettore).



4.5.g Cerchio di visibilità

- ❑ Il cerchio di visibilità è una costruzione grafica che consente di passare da una rappresentazione della funzione di radiazione di tipo cartesiano nelle variabili u e v ad una rappresentazione di tipo polare del diagramma di radiazione nella variabile θ .
- ❑ Facciamo riferimento al diagramma nel piano $\varphi=0$ per cui $u=\pi a \sin\theta/\lambda$. Si traccia una circonferenza di raggio $\pi a/\lambda$ (**cerchio di visibilità**) centrata nell'origine di un sistema cartesiano ed una semiretta uscente dal centro che forma un angolo θ con l'asse verticale e che rappresenta la direzione di osservazione. Essendo $u=\pi a \sin\theta/\lambda$ si ricava u proiettando il punto intersecato sulla circonferenza sull'asse orizzontale. Tale proiezione coincide pertanto con l'asse delle ascisse nel diagramma cartesiano del modulo della funzione di radiazione normalizzata. Il valore della corrispondente ordinata elevato al quadrato viene riportato sulla semiretta con direzione θ per determinare il punto del diagramma di radiazione.
- ❑ Nel caso di scansione elettronica basta traslare orizzontalmente la circonferenza di una quantità pari a u_0 .

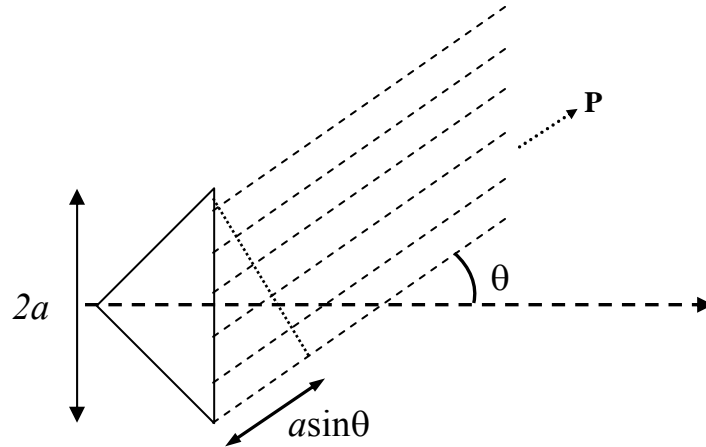


Note:

- Dell'intera funzione di radiazione in funzione della variabile u solo una parte determina il diagramma di radiazione dell'antenna in quanto limitandoci a valori reali di θ , cioè $|\sin\theta| \leq 1$, la variabile u al massimo vale $\pi a/\lambda$. Non tutti i lobi secondari nel diagramma della funzione di radiazione $F(u)$ corrispondono a direzioni reali, ovvero si rendono "visibili". Da questo deriva il nome conferito al "cerchio di visibilità".
- Aumentando il raggio del cerchio $\pi a/\lambda$, e quindi la dimensione a dell'antenna, a parità di λ il lobo principale si restringe e si rendono visibili un maggior numero di lobi secondari
- Esiste un cerchio che rende visibile il solo lobo principale o una parte di esso.
- Come già detto, la scansione elettronica determina una deformazione del diagramma al variare del puntamento (al contrario di una scansione di tipo meccanico ottenuta per rotazione dell'intera antenna).

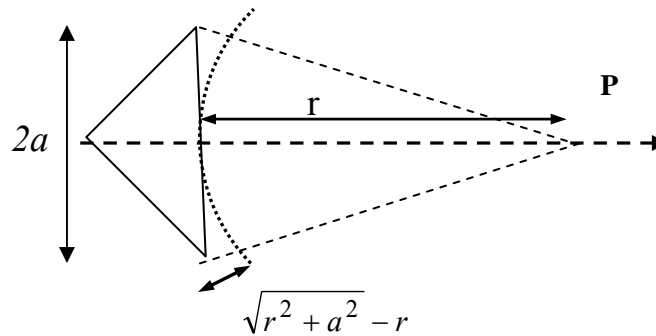
4.5.h Zone di Fresnel per antenne ad apertura

- L'approssimazione di Fraunhofer assume il punto di osservazione lontano e le congiungenti con i punti di sorgente parallele. Per illuminazione con fase costante i contributi dei punti di sorgente sull'asse sono in fase e il diagramma di radiazione è massimo. Fuori dell'asse lo sfasamento dovuto ai diversi percorsi dalla sorgente all'osservatore determina una diminuzione del campo. Al limite si hanno dei nulli quando lo sfasamento tra punti di sorgente alle estremità opposte dell'antenna di dimensione $2a$ raggiunge il valore 2π , ovvero quando $ka\sin\theta_1=2\pi$ e per θ_1 piccoli $\theta_1=\lambda/a$. Una opportuna variazione di fase lineare sull'apertura può compensare tale sfasamento e determinare un massimo in una direzione diversa dall'asse dell'antenna.



- Se ci avviciniamo a distanza r inferiore al limite della regione di Fraunhofer (ovvero, si entra in regione di Fresnel), diversi punti di sorgenti producono contributi nel punto di osservazione posto sull'asse che differiscono in maniera significativa in fase. La differenza massima di fase $\Delta\Psi_M$ è pari a:

$$\Delta\Psi_M = k_0 \left(\sqrt{r^2 + a^2} - r \right)$$

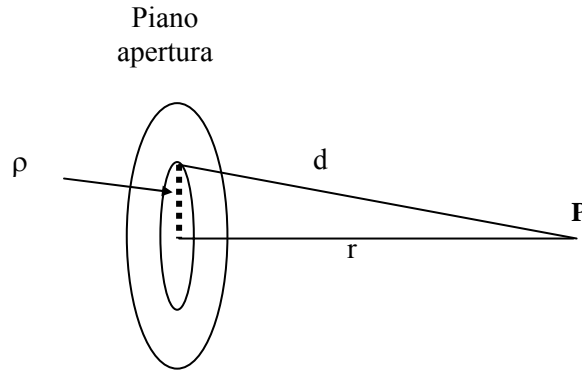


- I punti di sorgente che danno contributi con uguale fase ad un punto di osservazione sull'asse giacciono su delle circonferenze di raggio ρ centrate nell'origine dell'apertura. Se assumiamo apertura piccola rispetto a r (ovvero $a/r \ll 1$), la differenza di fase tra il punto centrale e un punto della circonferenza vale:

$$d = \sqrt{r^2 + \rho^2} = r \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{r^2}} \approx r + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r}$$

da cui la differenza di fase:

$$\Delta\Psi = \frac{2\pi}{\lambda} (d - r) \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r} = \frac{\pi}{\lambda r} \rho^2$$



□ Le **zone di Fresnel** sono corone circolari concentriche che danno contributi con fase concorde entro $\pi/2$.

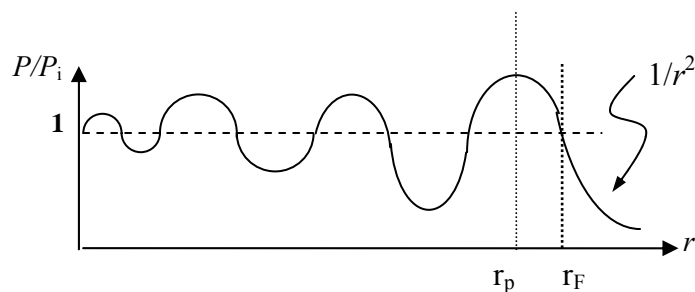
♠ La prima zona di Fresnel è rappresentata da un cerchio il cui raggio ρ_1 si ottiene ponendo $\Delta\Psi=\pi/2$, ovvero $\rho_1^2=\lambda r/2$. La distanza r_1 a cui bisogna porsi dall'antenna affinché un prefissato cerchio di raggio f si trovi nella prima zona di Fresnel vale pertanto $r_1=2\rho^2/\lambda$. E se ρ è proprio la dimensione a dell'antenna, si ritrova la nota formula che delimita la regione di Fraunhofer:

$$r_I \equiv r_F = \frac{2a^2}{\lambda}$$

♠ Se $\Delta\Psi=3\pi/2$, si trova il raggio massimo ρ_{II} della seconda zona di Fresnel (che vale $\rho_{II}^2=3\lambda r/2$) oppure la distanza r_{II} a cui ci si deve porre affinché un cerchio di raggio ρ si trovi al limite della seconda zona di Fresnel (che vale $r_{II}=2\rho^2/3\lambda$).

□ Al diminuire di r si “scoprono” sull'apertura un maggior numero di zone di Fresnel. Viceversa, all'aumentare di r diminuiscono le zone scoperte e in regione di Fraunhofer è scoperta in tutto o in parte solo la prima zona di Fresnel che fornisce contributi in fase al campo sull'asse. Al crescere del loro ordine le zone sono corone circolari sempre più sottili.

□ In zona di Fraunhofer la densità di potenza irradiata decresce come $1/r^2$. Avvicinandosi, a causa dei contributi in fase o controfase dei punti di sorgente, essa presenta un andamento oscillante. Se normalizziamo la densità di potenza $P(r)$ al valore che ha sull'apertura P_i (ovvero quella del campo di illuminazione), si ottiene una curva come in figura:



con $r_F=2a^2/\lambda$ distanza di Fraunhofer e r_p la distanza del cosiddetto *pseudo-fuoco* dove P è massima.

4.6 ANTENNE A TROMBA

4.6.a Caratteristiche generali delle antenne a tromba

- ❑ Antenne utilizzate come illuminatori di grandi antenne a riflettore o a lente per radio-astronomia, inseguimento (*tracking*) di satelliti, ponti radio ecc.. Utilizzate anche come elementi di allineamenti d'antenna (*phased-array*) e come standard per misure su antenne.
- ❑ Una antenna a tromba è costituita da una guida d'onda che all'estremità aumenta una (o entrambe) le dimensioni (e quindi l'apertura), aumentando il guadagno e diminuendo la riflessione.
- ❑ La radiazione di una guida d'onda troncata è stata calcolata assumendo campo sull'apertura pari a quello del modo fondamentale nella guida come se essa avesse lunghezza infinita. Si trascura la riflessione dovuta al disadattamento tra impedenza caratteristica del modo (η_z) e l'impedenza dell'onda in spazio libero $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Per il modo fondamentale TE_{10} di una guida d'onda rettangolare di larghezza a risulta:

$$k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad \text{e} \quad \eta_z = \eta \frac{k}{k_z} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

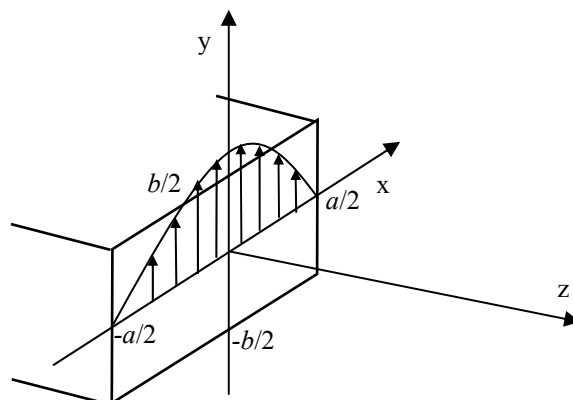
Si noti che k_z e η_z approssimano k e η , rispettivamente, quando le dimensioni della guida crescono. Quindi, aumentando progressivamente la sezione della struttura si ottiene un migliore adattamento tra il modo in guida e lo spazio libero.

- ❑ Una tromba che deriva da una guida rettangolare può accrescere la sua dimensione
 - ♠ sul piano che contiene il campo elettrico (**tromba divergente sul piano di E**)
 - ♠ sul piano (ortogonale) che contiene il campo magnetico (**tromba divergente sul piano di H**)
 - ♠ su entrambi i piani (**tromba piramidale**).

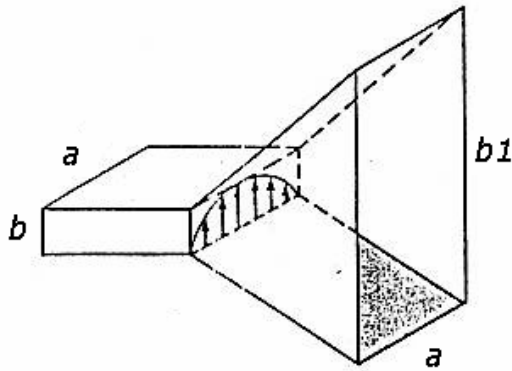
L'aumento delle dimensioni può avvenire linearmente oppure con andamenti che seguono leggi diverse (ad esempio, esponenziale). Partendo da una guida circolare si ottiene invece una **tromba conica**.

- ❑ Nella figura è riportata la configurazione del campo elettrico del modo fondamentale TE_{10} nella guida rettangolare di dimensioni $a \times b$ ($a > b$) che è diretto lungo y (lato piccolo della guida) e varia con legge cosinusoidale lungo x (lato maggiore b della guida):

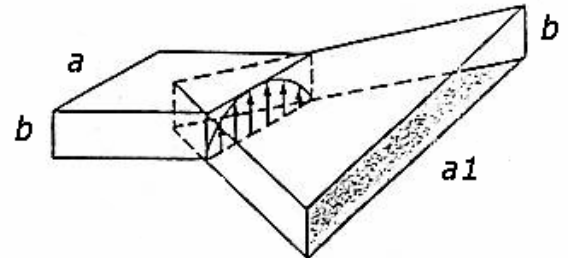
$$E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z}$$



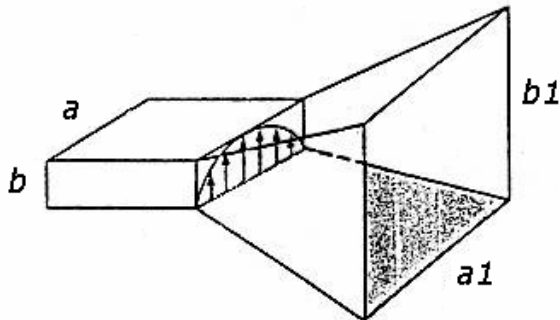
- La figura mostra diverse configurazioni di antenne a tromba. Nella tromba divergente sul piano di E, sul piano di H e nella tromba piramidale è anche indicata la configurazione del campo elettrico del modo fondamentale in guida.



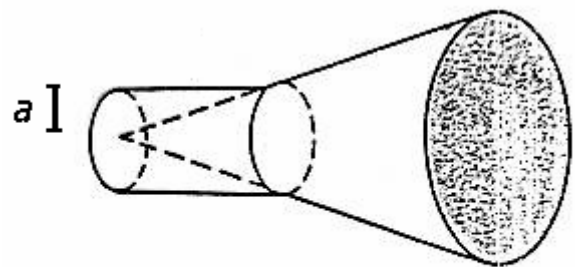
Tromba divergente sul piano di E



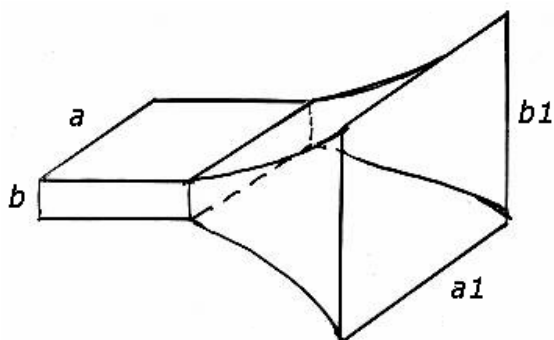
Tromba divergente sul piano di H



Tromba piramidale



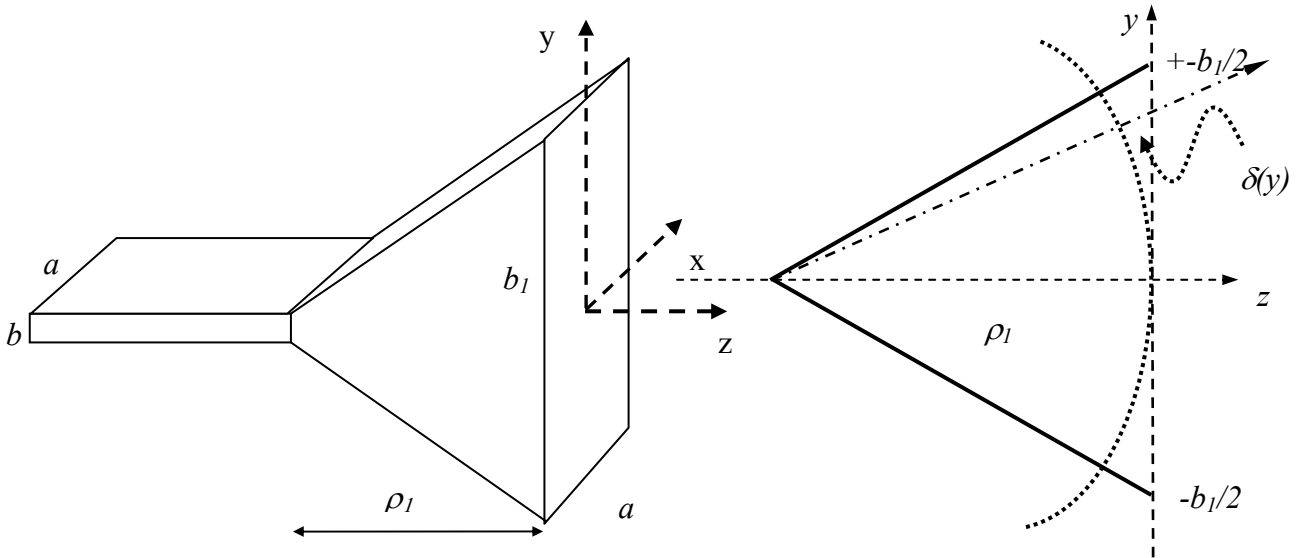
Tromba conica



Rastremazione esponenziale

4.6.b Tromba divergente nel piano di E

- Una tromba divergente sul piano di E è ottenuta a partire da una guida rettangolare di dimensioni a, b . E' costituita da due pareti metalliche piane parallele e due pareti piane che divergono sul piano di E a partire da un vertice e con un angolo di divergenza (*flare angle*) Φ_1 . La struttura è troncata ed ha una lunghezza longitudinale ρ_1 (distanza dal vertice della bocca radiante) ed un'apertura radiante di dimensioni a (nella direzione x) e b_1 (nella direzione y). b_1 è legata alla lunghezza ρ_1 e all'angolo di divergenza Φ_1 .
- Sotto ipotesi generalmente verificate (propagazione del solo modo fondamentale TE_{10} , struttura sufficientemente lunga, ovvero $k\rho_1 \gg 1$ e non troppo divergente, ovvero $b_1 \ll 2\rho_1$) e trascurando i fenomeni di diffrazione e riflessione in corrispondenza del troncamento è possibile ricavare il campo sul piano dell'apertura. Tralasciamo la dimostrazione rigorosa di quanto segue.
- Si dimostra che nella struttura divergente si propaga un'onda cilindrica i cui piani equifase sono cilindri con asse coincidente con la retta che costituisce il vertice delle pareti divergenti, parallela all'asse x sul piano d'apertura (come indicato in figura). L'ampiezza del campo varia come $\rho^{-1/2}$, essendo ρ la distanza dal vertice, mentre la sua configurazione trasversa è uguale a quella del modo TE_{10} nella guida. Se l'angolo Φ_1 è piccolo il campo sull'apertura rimane approssimativamente parallelo ed in modulo proporzionale a quello in guida (a parte un fattore legato alla lunghezza $\rho_1^{-1/2}$).



- Tuttavia, a causa del fatto che le superfici equifase all'interno della tromba sono cilindriche, la fase del campo sull'apertura (ovvero, la **funzione di illuminazione**) varia sul piano di E, ovvero lungo y. Se $k\delta(y)$ è la differenza di fase tra l'origine del sistema di riferimento nel piano di bocca ed un punto su tale piano avente coordinata y, in base alla geometria in figura vale la seguente relazione:

$$y^2 + \rho_1^2 = [\rho_1 + \delta(y)]^2 = \rho_1^2 + \delta^2(y) + 2\rho_1\delta(y)$$

Se $b_1 \ll 2\rho_1$ il termine $\delta^2(y)$ è piccolo e si trascura. Pertanto:

$$y^2 + \rho_1^2 \approx \rho_1^2 + 2\rho_1\delta(y) \quad \Rightarrow \quad \delta(y) \approx \frac{1}{2} \frac{y^2}{\rho_1}$$

- L'errore di fase, riferito alla fase al centro dell'apertura, varia con legge quadratica sul piano di E in funzione della coordinata y e vale $\delta(y) = y^2 / 2\rho_1$.
- Il campo elettrico trasverso sull'apertura (la **funzione di illuminazione**) è diretto lungo y e, conglobando fattori costanti nel termine di ampiezza E_0 , ha la seguente espressione approssimata:

$$E_y(x, y) = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jk_z y^2 / 2\rho_1} \quad |x| < a/2, |y| \leq b_1/2$$

- Il campo di illuminazione è fattorizzabile, ovvero:

$$E_y(x, y) = f_y^{(x)}(x) f_y^{(y)}(y)$$

Rispetto al problema già risolto di radiazione di una guida d'onda rettangolare troncata, si hanno le seguenti differenze:

- l'illuminazione $f^{(x)}(x)$ sul piano di H è identica (cosinusoidale);
- l'illuminazione $f^{(y)}(y)$ sul piano di E in modulo è ancora rettangolare di dimensione b_1 ma la differenza è rappresentata dal fattore di fase quadratico (errore di fase).

- Applicheremo la teoria dell'apertura per calcolare il campo irradiato dall'antenna a distanza di Fraunhofer. Per piccoli angoli di divergenza Φ_1 il diagramma di radiazione si può dedurre da quanto già ricavato per guida rettangolare troncata (assumendo dimensioni $a \times b_1$) in quanto l'errore di fase è trascurabile.

La funzione di illuminazione $f^{(x)}(x)$ è rastremata e pertanto i lobi laterali sul piano H sono bassi, mentre sul piano E $f^{(y)}(y)$ è costante in modulo e i lobi laterali sono elevati. Sul piano di E al crescere della divergenza Φ_1 (ovvero della dimensione della bocca b_1 per lunghezza ρ_2 costante) l'ampiezza del lobo diminuisce e la direttività aumenta in quanto aumenta la dimensione b_1 dell'apertura stessa.

- Quando Φ_1 è grande, l'errore di fase $k\delta(y)$ non è trascurabile. Sul piano di E l'ampiezza del lobo e la direttività presentano un comportamento oscillante al crescere di Φ_1 . Ciò è dovuto alla deviazione quadratica della fase che fornisce agli estremi contributi distruttivi al campo irradiato rispetto al centro.
- Il massimo errore di fase presente ai bordi per $y = -b_1/2$ è pari a $k\delta_M$, dove:

$$\delta_M = \delta\left(\frac{b_1}{2}\right) \cong \frac{1}{2} \frac{(b_1/2)^2}{\rho_1}$$

imponiamo che l'errore di fase non ecceda $\pi/2$ ($k_0\delta_M < \pi/2 \Rightarrow \delta_M \leq \lambda/4$) in modo da non fornire contributi in contro-fase al campo irradiato. Ne consegue:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{(b_1/2)^2}{2\rho_1} \approx \pi/2$$

Dalla precedente, si ottiene il seguente valore ottimo b_{1opt} considerando la geometria della struttura che assicura massima direttività e lobo principale stretto:

$$b_{1opt} \approx \sqrt{2\lambda\rho_1}$$

Nella condizione di ottimo il massimo valore di $\delta(y)$ (alle estremità dell'apertura) vale $\delta_M = 0.25\lambda$.

- Fissato un valore di δ_M (il valore "ottimo" 0.25λ o un valore inferiore più conservativo), è vincolata la lunghezza della tromba una volta scelta la divergenza e viceversa, valendo la relazione geometrica:

$$\rho_1 = \frac{\delta_M \cos(\Phi_1/2)}{1 - \cos(\Phi_1/2)}.$$

essendo

$$\rho_1 - \rho_1 \cos(\Phi_1/2) = \delta_M \cos(\Phi_1/2).$$

- La direttività è pari a quella della guida troncata di dimensioni axb_1 ($32ab_1/\pi\lambda^2$) divisa per un fattore L_E maggiore di uno che tiene conto dell'effetto dell'errore di fase. Risulta $L_E \approx 1.25$ in condizioni di ottimo, ovvero:

$$D_E \cong \frac{32ab_1}{\lambda^2 \pi} \frac{1}{L_E} \Rightarrow D_{Eopt} \cong \frac{32ab_{1opt}}{\lambda^2 \pi} \frac{1}{L_E} = \frac{32ab_{1opt}}{\lambda^2 \pi} \frac{1}{1.25}$$

Si noti che la precedente è valida nel limite in cui $k_z \approx k$.

- Nelle figure che seguono, si evidenzia come il valore ottimo di b_1 corrisponda ad un minimo assoluto dell'apertura angolare del lobo principale, ovvero ad un massimo assoluto della direttività. Si noti come tali valori siano dipendenti dalla lunghezza della tromba e dalla lunghezza d'onda, come anticipato.

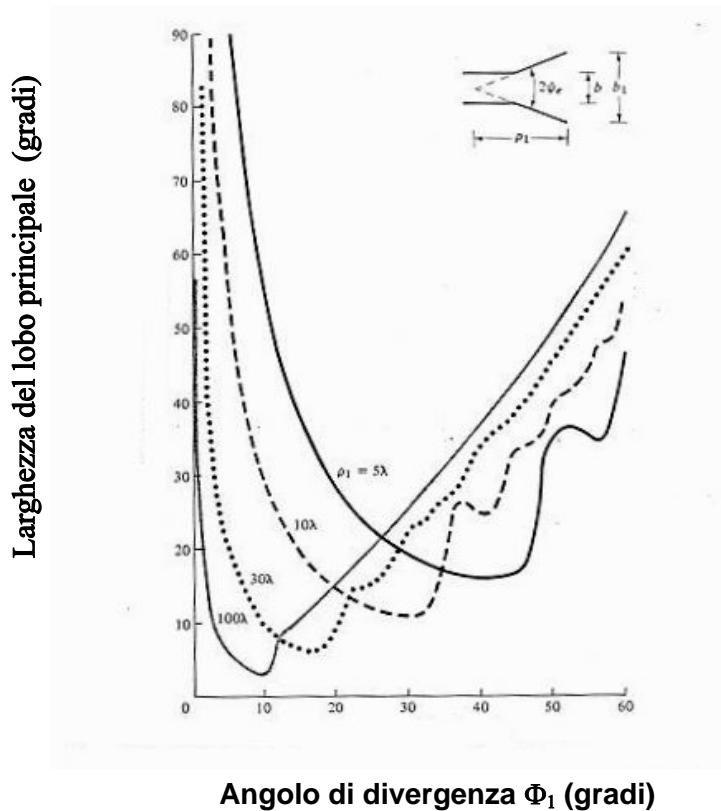


Figura. Larghezza del lobo per tromba divergente sul piano E in funzione dell'angolo di divergenza e per differenti lunghezze della tromba a (Ref. C.A. Balanis, "Antenna Theory").

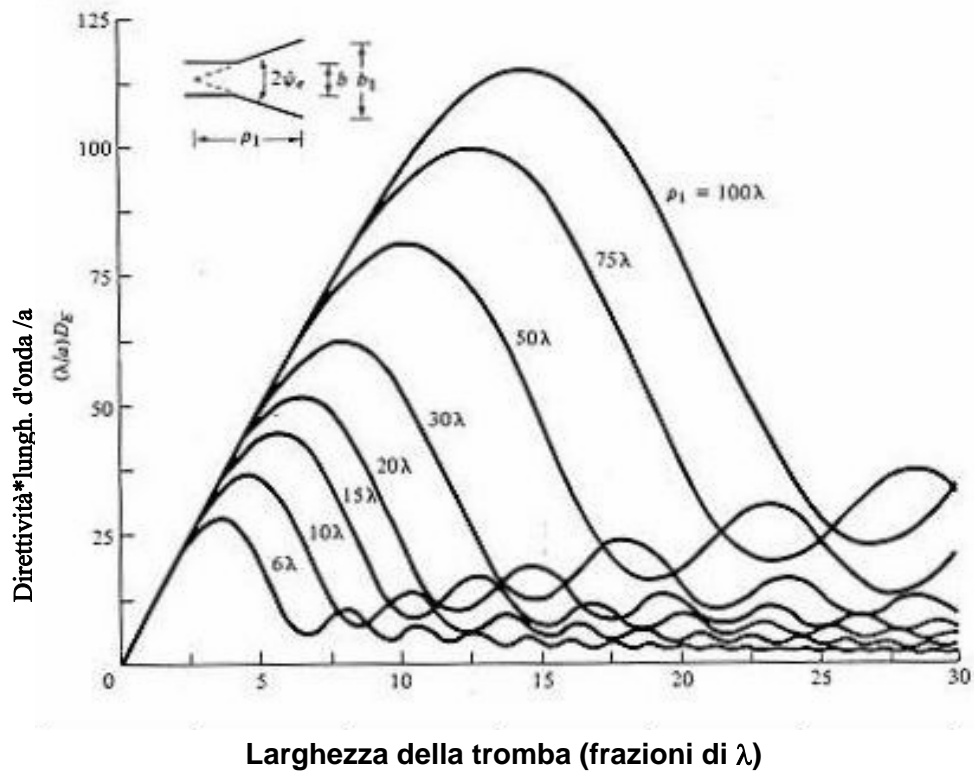


Figura. Direttività normalizzata per tromba divergente sul piano E in funzione della dimensione dell'apertura e per differenti lunghezze della tromba. (Ref. C. A. Balanis, "Antenna Theory"):

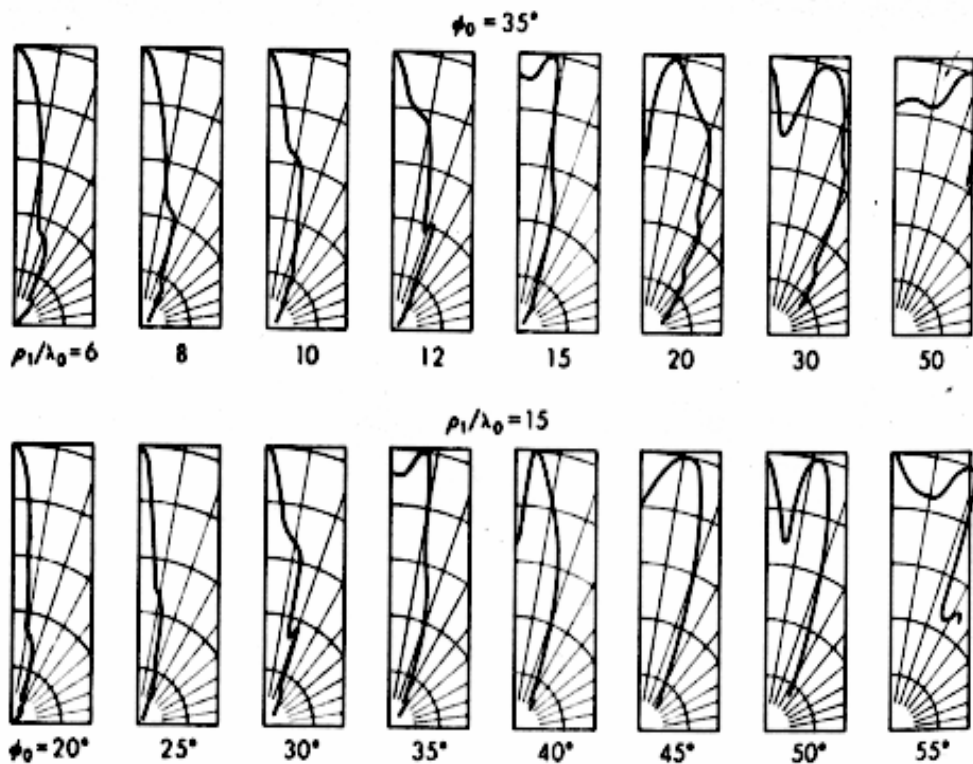
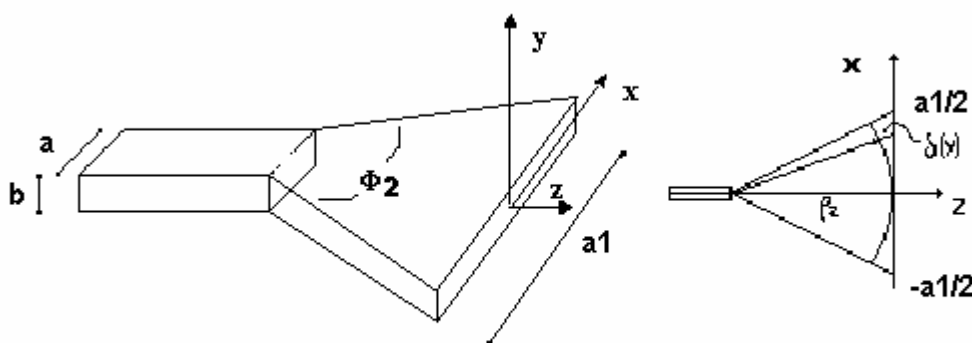


Figura. Tipici diagrammi di radiazione per una tromba divergente sul piano E. La serie superiore per un angolo di apertura costante di 35° e diverse lunghezze della tromba; la serie inferiore per una lunghezza di $15\lambda_0$ e diversi angoli di divergenza (Ref. R.E. Collin, F. J. Zucker "Antenna Theory")

4.6.c Tromba divergente nel piano di H

- Una tromba divergente sul piano di H è ottenuta a partire da una guida rettangolare di dimensioni a, b . E' costituita da due pareti metalliche piane parallele e due pareti piane che divergono sul piano di H a partire da un vertice e con un angolo di divergenza Φ_2 . La struttura è troncata ed ha una lunghezza ρ_2 (distanza dal vertice della bocca radiante) ed un'apertura radiante di dimensioni a_1 (nella direzione x) e b (nella direzione y). a_1 è legata alla lunghezza ρ_2 e all'angolo di divergenza Φ_2 .
- Sotto ipotesi generalmente verificate ed identiche a quelle già citate nella tromba divergente sul piano di E è possibile ricavare il campo sul piano dell'apertura.
- Nella struttura divergente si propaga un'onda i cui piani equifase sono cilindri con asse coincidente con la retta che costituisce il vertice delle pareti divergenti (parallelo all'asse y definito sul piano d'apertura). Tenendo conto della necessità di conservare campo tangenziale nullo sulle pareti metalliche divergenti la configurazione trasversa rimane analoga a quella del modo TE_{10} nella guida ma risulta geometricamente scalata nella direzione di H in conseguenza dell'aumento delle dimensioni della struttura. Il campo sull'apertura è diretto lungo y e se l'angolo Φ_2 è piccolo e in modulo ha andamento cosinusoidale e si annulla alle estremità $-a_1/2$ e $a_1/2$.
- A causa del fatto che le superfici equifase all'interno della tromba sono cilindriche la fase del campo sull'apertura varia sul piano di H ovvero rispetto alla coordinata x e l'errore di fase $\delta(x)$ è approssimativamente pari a $\delta(x) = y^2/2\rho_2$ (la dimostrazione è identica al caso precedente).



- Il campo elettrico trasverso sull'apertura (ovvero, la **funzione di illuminazione**) è diretto lungo y e, conglobando fattori costanti nel termine di ampiezza E_0 , ha la seguente espressione approssimata:

$$E_y(x, y) = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x\right) e^{-jk_0 x^2/2\rho_2} \quad |x| \leq a_1/2, |y| \leq b/2$$

- Il campo di illuminazione è ancora fattorizzabile ed in modulo analogo a quello della guida rettangolare troncata (di dimensione $a_1 \times b$).

$$E_y(x, y) = f_y^{(x)}(x) f_y^{(y)}(y)$$

La variazione di fase quadratica (errore di fase) ora è presente sul piano di H, ovvero nella stessa direzione in cui l'ampiezza ha andamento cosinusoidale.

- Per piccoli angoli di divergenza Φ_2 il diagramma di radiazione si deduce da quanto ricavato per guida rettangolare troncata (assumendo dimensioni $a_1 \times b$) in quanto l'errore di fase è trascurabile. Sul piano H la illuminazione è rastremata e quindi i lobi laterali sono limitati. Sul piano E l'illuminazione uniforme e quindi il lobo principale stretto ed i lobi laterali più elevati. Il confronto con i diagrammi di radiazione della tromba rastremata sul piano E mostra come, relativamente al piano in cui si ha l'allargamento della struttura (ove i lobi laterali entrano nel cerchio di visibilità) si hanno in effetti in questo ultimo caso dei lobi laterali molto attenuati.
- Quando Φ_2 cresce, sul piano di H l'ampiezza del lobo e la direttività presentano un valore ottimo e successivamente un comportamento oscillante dovuto all'errore di fase che diventa importante agli estremi dell'apertura. e fornisce contributi al campo irradiato distruttivi rispetto al centro dell'apertura. Il massimo *errore di fase* presente ai bordi è pari a $k\delta_M$, dove:

$$\delta_M = \delta\left(\frac{a_1}{2}\right) \cong \frac{1}{2} \frac{(a_1/2)^2}{\rho_2}$$

- Siccome sul piano di H (asse x) il modulo del campo di illuminazione va a zero alle estremità sono tollerabili errori di fase massimi maggiori di quanto non succeda nelle trombe divergenti sul piano di E. Imponendo la condizione $k_0\delta_M < 3\pi/4$, si ottiene il seguente valore di ottimo di a_1 per l'antenna divergente sul piano H:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{(a_1/2)^2}{2\rho_2} \approx 3\pi/4 \quad \Rightarrow \quad a_{1opt} \approx \sqrt{3\lambda\rho_2}$$

Nella condizione di ottimo, il massimo δ_M è pari a 0.375λ .

- La direttività è pari a quella della guida troncata di dimensioni $a_1 \times b$ divisa per un fattore L_H maggiore di uno ($L_H \approx 1.3$ in condizioni di ottimo) che tiene conto dell'effetto dell'errore di fase, ovvero:

$$D_H \cong \frac{32a_1b}{\lambda^2\pi} \frac{1}{L_E} \quad \Rightarrow \quad D_{Hopt} \cong \frac{32a_{1opt}b}{\lambda^2\pi} \frac{1}{L_H} = \frac{32a_{1opt}b}{\lambda^2\pi} \frac{1}{1.3}$$

Si noti che la precedente è valida nel limite in cui $k_z \approx k$.

Nota:

- I grafici dei diagrammi di radiazione riportati mostrano il diverso comportamento delle due tipologie di trombe divergenti sul piano E e sul piano H quando il diagramma di radiazione sia analizzato nello stesso piano in cui la struttura diverge.
- Si è visto come al crescere oltre un certo limite dell'angolo di divergenza oppure della lunghezza della tromba si ha un peggioramento delle proprietà dell'antenna, più significativo nel caso di tromba divergente sul piano E. Questo conduce ad una condizione geometrica di ottimo più restrittiva.
- Nel piano in cui si ha l'allargamento della struttura i lobi laterali entrano nel **cerchio di visibilità**. Si nota come essi sono più attenuati nel caso di tromba divergente sul piano H.

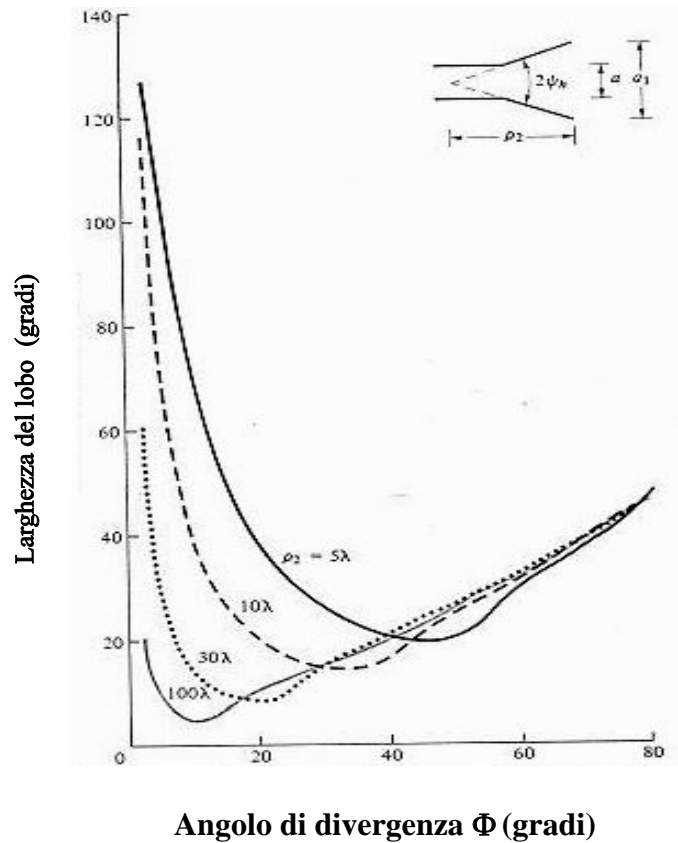


Figura. Larghezza del lobo principale per una tromba divergente sul piano H in funzione dell'angolo di divergenza (in gradi) e per diverse lunghezze della tromba (Ref. C.A. Balanis, "antenna Theory"):

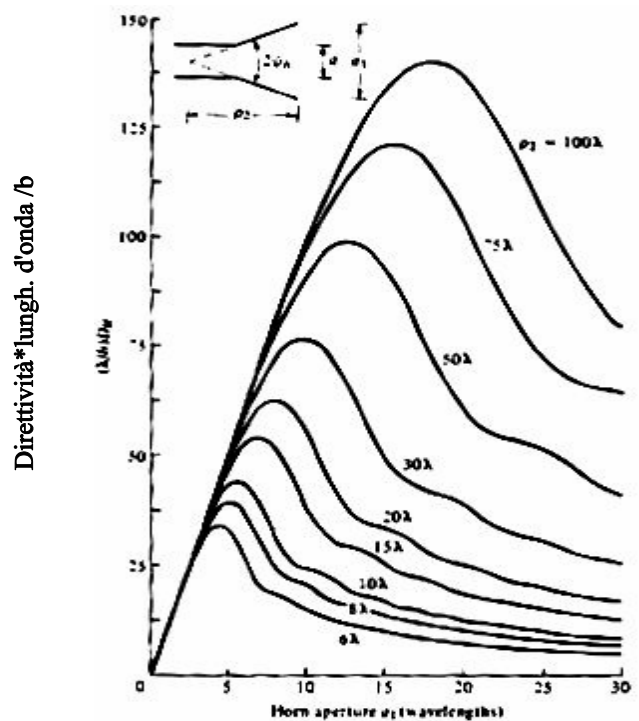


Figura. Direttività normalizzata di una tromba divergente sul piano H in funzione della dimensione dell'apertura (in unità di lunghezze d'onda) e per differenti lunghezze della tromba (Ref. C..A. Balanis, "Antenna Theory")

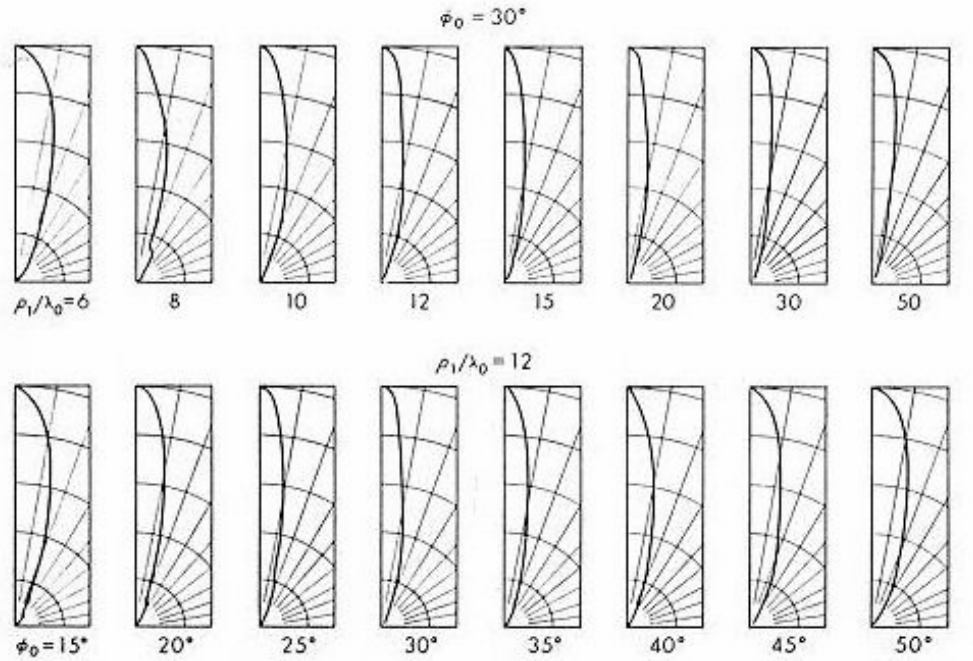
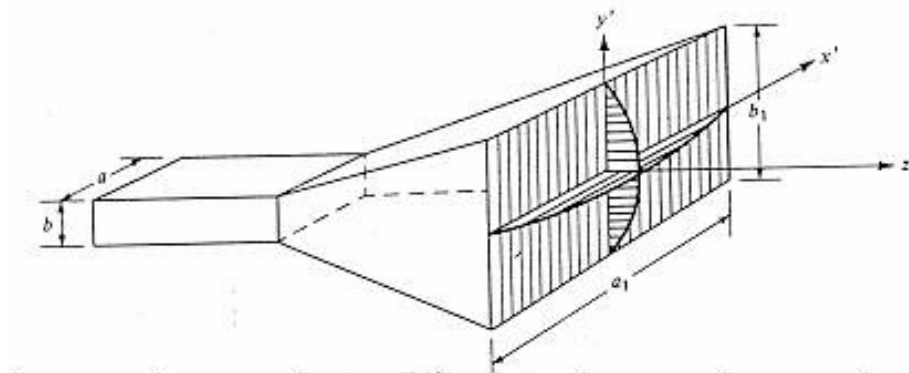


Figura. Tipici diagrammi di radiazione per una tromba divergente sul piano H. La serie superiore per un angolo di divergenza costante di 30° e diverse lunghezze della tromba; la serie inferiore per una lunghezza di 12λ e diversi angoli di divergenza (Ref. R.E.Collin, F.J. Zucker, “Antenna Theory”)

4.6.d Tromba piramidale

- Una tromba piramidale è una struttura che diverge sia sul piano E che sul piano H per cui presenta un lobo principale più stretto rispetto a quello che si otterrebbe troncando la guida che la alimenta, questo in entrambi i piani $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi/2$.



- Le proprietà radiative vengono generalmente ricavate in base ai risultati già illustrati per le trombe rastremate sul piano E e su quello H. In particolare il campo tangenziale sulla bocca (campo di illuminazione) è fattorizzabile e approssimativamente vale:

$$E_y(x, y) \approx E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x\right) e^{-jk\left(\frac{x^2}{2\rho_2} + \frac{y^2}{2\rho_1}\right)}$$

- Lungo x varia come per la tromba rastremata sul piano H mentre lungo y come per quella rastremata sul piano E. Grazie alla fattorizzabilità di tale illuminazione, potremo quindi affermare subito che il diagramma di radiazione sul piano E coincide con quello già trovato per la tromba rastremata sul piano E.

Il diagramma sul piano H sarà quello della tromba rastremata sul piano H. Quest'ultimo risulta avere lobi laterali più bassi e lobo principale più ampio (a parità di dimensioni lineari della bocca) a causa della rastremazione cosinusoidale dell'illuminazione su tale piano.

- La direttività è comodo esprimerla in funzione del prodotto di quelle ricavate per le trombe rastremate sul piano E (D_E) e sul piano H (D_H), oppure della direttività di una apertura delle stesse dimensioni ($a_1 \times b_1$) con fase costante ed illuminazione cosinusoidale ($32a_1b_1/\pi\lambda^2$) introducendo fattori di "perdita" $1/L_E$ e $1/L_H$ associati all'errore quadratico della fase su entrambi i piani:

$$D \approx \frac{\pi\lambda^2}{32ab} D_E D_H \approx \frac{32}{\pi\lambda^2} a_1 b_1 \frac{1}{L_E} \frac{1}{L_H}$$

Tale relazione si scrive, quando espressa in dB:

$$D_{dB} = 10 \left[1.008 + \log_{10} \frac{a_1 b_1}{\lambda^2} \right] - L_{E_{dB}} - L_{H_{dB}}$$

- I valori ottimi delle dimensioni della tromba che assicurano massima direttività sono:

$$b_{1opt} \approx \sqrt{2\lambda\rho_1} \quad \text{sul piano E;} \quad a_{1opt} \approx \sqrt{3\lambda\rho_2} \quad \text{sul piano H}$$

4.6.e Tromba conica

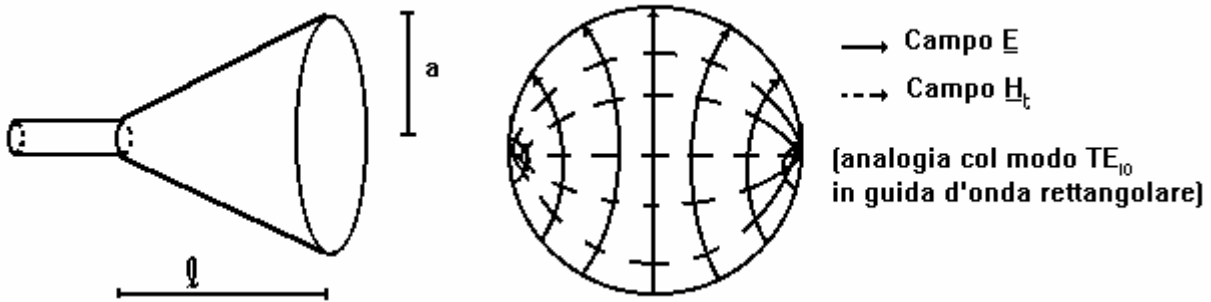


Figura. Configurazione geometrica della tromba conica e linee di forza dei campi trasversi del modo fondamentale TE_{11} sulla bocca

- Si tratta di una tromba ottenuta a partire da una guida d'onda circolare e che ha una apertura della bocca radiante circolare di raggio a ed una lunghezza l . La trattazione della tromba conica è complessa e ci limitiamo a riportare i risultati, comunque del tutto analoghi a quelli delle trombe ad apertura rettangolare. Nella figura si ricorda la configurazione del modo fondamentale TE_{11} in guida d'onda circolare, analogo al modo TE_{10} in guida rettangolare.
- La direttività D_C della tromba conica è quella di una guida d'onda circolare aperta dello stesso raggio, moltiplicata per un fattore L_C che tiene conto dell'effetto dell'errore di fase quadratico:

$$D_C = \frac{4\pi}{\lambda^2} \pi a^2 \frac{1}{L_C}$$

- ❑ La *perdita* dovuta al termine L (usualmente espresso in dB) dipende dalla deviazione di fase massima sul contorno della bocca. Si ricava anche in questo caso una condizione di ottimo per la direttività che corrisponde ad un massima deviazione $\delta_M = 3\lambda/8$, ovvero un errore di fase massimo pari a $3\pi/4$:

$$2a_{opt} \approx \sqrt{3l\lambda}$$

- ❑ In tal caso le perdite L_C risultano pari a circa 2.9 dB, ovvero l'efficienza è pari a circa il 51%.