

2.4 EQUAZIONI DI HELMHOLTZ

2.4.a Deduzione dell'equazione delle onde

In un mezzo lineare, isotropo e, in generale, con costante dielettrica disomogenea, applichiamo il rotore alla I eq. di Maxwell assumendo $\mu=\mu(\mathbf{r})$ costante:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu(\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) - \nabla \times \underline{\mathbf{J}}_m$$

Ma dalla II eq. di Maxwell: $\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_c \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}$, per cui sostituendo:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = +\omega^2 \epsilon_c \mu \underline{\mathbf{E}} - j\omega\mu \underline{\mathbf{J}} - \nabla \times \underline{\mathbf{J}}_m$$

Ricordando che: $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c$, si può riscrivere:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}} - k^2 \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \underline{\mathbf{J}} - \nabla \times \underline{\mathbf{J}}_m$$

Dall'identità vettoriale sul rotore del rotore di un campo vettoriale, si ha per il primo membro:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} + \nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}$$

Inoltre, la $\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}$ si può esplicitare usando la legge di Gauss per un mezzo, in generale, disomogeneo con $\epsilon_c = \epsilon_c(\mathbf{r})$:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = \rho \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (\epsilon_c \underline{\mathbf{E}}) = \epsilon_c \nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{E}} \cdot \nabla \epsilon_c = \rho$$

che, introducendo l'indice di rifrazione $n = \sqrt{\epsilon_c / \epsilon_o} = \sqrt{\epsilon_{rc}}$, si può riscrivere:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_c} - \underline{\mathbf{E}} \cdot \frac{\nabla \epsilon_c}{\epsilon_c} = \frac{\rho}{\epsilon} - \underline{\mathbf{E}} \cdot \nabla \ln \epsilon_{rc} = \frac{\rho}{\epsilon} - 2\underline{\mathbf{E}} \cdot \nabla \ln n$$

Sostituendo nell'equazione originaria:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} + k^2 \underline{\mathbf{E}} + 2\nabla(\underline{\mathbf{E}} \cdot \nabla \ln n) = j\omega\mu \underline{\mathbf{J}} + \nabla \times \underline{\mathbf{J}}_m + \nabla \left(\frac{\rho}{\epsilon_c} \right)$$

Nota:

- il termine dell'equazione precedente, caratteristico di mezzi non omogenei:

$$2\nabla(\underline{\mathbf{E}} \cdot \nabla \ln n)$$

è detto *termine di depolarizzazione*. La presenza di questo termine, anche in assenza di sorgenti (termine noto nullo), non consente di scomporre l'equazione in tre equazioni scalari indipendenti.

Tale termine diventa trascurabile se le variazioni Δn dell'indice di rifrazione (tra due punti del mezzo) sono trascurabili rispetto alle corrispondenti variazioni di fase. Ovvero, se Δl è la scala di variazione di n deve risultare:

$$\left(\frac{\Delta n}{\Delta l} \right)^2 \ll \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = k^2$$

In mezzi omogenei, il termine di depolarizzazione è, ovviamente, nullo.

Trascurando il termine di depolarizzazione e sfruttando il teorema di dualità, si ottengono le **eq. di Helmholtz vettoriali non omogenee** (impropriamente, dette eq. delle onde) per il campo $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{H}}$ in funzione delle sorgenti impresse:

$$\begin{cases} \nabla^2 \underline{\mathbf{E}} + k^2 \underline{\mathbf{E}} = j\omega\mu\underline{\mathbf{J}} + \nabla\left(\frac{\rho}{\epsilon_c}\right) + \nabla \times \underline{\mathbf{J}}_m \\ \nabla^2 \underline{\mathbf{H}} + k^2 \underline{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_c\underline{\mathbf{J}}_m + \nabla\left(\frac{\rho_m}{\epsilon_c}\right) - \nabla \times \underline{\mathbf{J}} \end{cases}$$

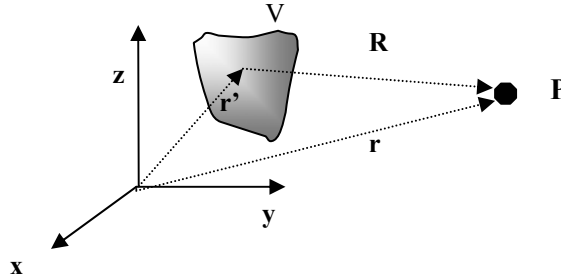
2.4.b Soluzione mediante la funzione di Green

L'eq. di Helmholtz non omogenea ha la forma del tipo:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) + k^2 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}})$$

dove la funzione vettoriale $\underline{\mathbf{f}}$ indica complessivamente le sorgenti. Si noti che:

- il vettore $\underline{\mathbf{r}}'$ è vettore di posizione delle sorgenti, assegnate nel volume V in cui $\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}})=\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}')$ è diversa da zero;
- il vettore $\underline{\mathbf{r}}$ è il vettore che identifica il punti di osservazione del campo $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$;
- l'operatore ∇ opera sul vettore $\underline{\mathbf{r}}$.



La precedente equazione in coordinate cartesiane assume la forma:

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})}{\partial z^2} + k^2 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}})$$

Un metodo per risolvere un'eq. differenziale di questo tipo è il *metodo della funzione di Green* $G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$.

➤ Richiami sulla funzione di Green in spazio libero

$$\nabla^2 G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + k^2 G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = -\delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')$$

essendo δ è una sorgente impulsiva vettoriale centrata in $\underline{\mathbf{r}}=\underline{\mathbf{r}}'$, la cui soluzione si dimostra essere:

$$G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \frac{1}{4\pi R} e^{-jkR}$$

dove in coordinate cartesiane $R = |\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$

➤ Metodo di soluzione mediante funzione di Green

Poiché l'operatore ∇ opera sul vettore $\underline{\mathbf{r}}$, si può scrivere:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + k^2 \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = -\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}') \delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')$$

Integrando sul volume V che racchiude le sorgenti, per le proprietà della funzione δ :

$$\nabla^2 \int_V \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' + k^2 \int_V \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = -\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}})$$

da cui, per confronto con l'equazione del campo:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \int_V \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Visto che $G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')$ e la limitatezza del volume è determinata dalla funzione $\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}')$, l'integrale precedente può essere interpretato come convoluzione spaziale:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}) \otimes G(\underline{\mathbf{r}})$$

Quindi, in mezzo lineare, isotropo e omogeneo ed illimitato il campo $\underline{\mathbf{E}}$ può essere interpretato come risposta del mezzo alla sollecitazione (ingresso) delle sorgenti $\underline{\mathbf{f}}$ essendo la funzione di Green G la risposta impulsiva.

Note

- La funzione di Green è una **funzione scalare**, in quanto è stato implicitamente assunto che l'eq. di Helmholtz vettoriale, proiettata rispetto alle 3 coordinate cartesiane, si riduce a 3 eq. differenziali scalari indipendenti. Ciò equivale ad affermare che le sorgenti impresse (ovvero, il termine noto $\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}})$), nonché le condizioni al contorno, siano decomponibili in 3 condizioni indipendenti per ciascuna componente incognita della funzione vettoriale $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$.
- Quando le ipotesi precedenti non sono valide (e.g., nel caso di sorgenti in mezzi anisotropi), occorre introdurre una **funzione diadica** di Green $\underline{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$, ovvero un tensore di ordine 3 (matrice 3x3):

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{bmatrix}$$

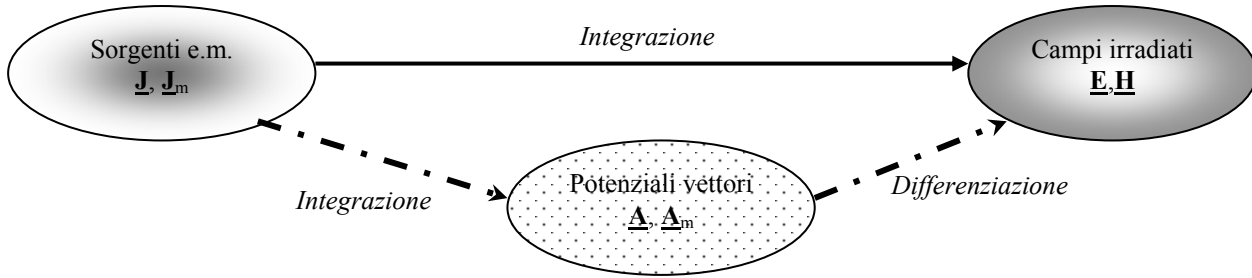
che tenga conto dell'effetto sulla componente di $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$ di componenti non omologhe della sorgente.

2.5 FORMULE DI RADIAZIONE E.M.

E' possibile ricavare il campo irradiato da una distribuzione qualunque di sorgenti (correnti e cariche elettriche e magnetiche) in un mezzo lineare, isotropo e omogeneo seguendo due approcci:

- mediante *diretta integrazione* dell'eq. vettoriale di Helmholtz per i campi, in cui compaiono cariche e correnti (si veda la formula di Stratton-Chu nel seguito);
- mediante i *potenziali elettrodinamici*, ovvero effettuando prima l'integrazione dell'eq. di Helmholtz per i potenziali e successivamente l'opportuna differenziazione di quest'ultimi.

Il *vantaggio* del metodo dei potenziali è, in generale, nella forma più semplice degli integrandi rispetto alle espressioni tipiche nell'integrazione diretta; lo *svantaggio* sta nel dover effettuare due passi, ovvero prima integrazione e poi differenziazione, come mostrato in figura.



➤ Metodo integrazione diretta eq. di Helmholtz per il campo

In un mezzo lineare, isotropo e omogeneo, la soluzione dell'eq. di Helmholtz vettoriale non omogenea per il campo elettrico fornisce la *formula di radiazione* in termini di sorgenti (cariche e correnti):

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\mu \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' - \frac{1}{\epsilon_c} \int_V [\nabla' \rho(\underline{\mathbf{r}}')] G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' - \int_V [\nabla' \times \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}')] G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

ove l'operatore differenziale ∇' opera rispetto al vettore $\underline{\mathbf{r}}'$ di posizione delle sorgenti.

Note

- Nella formula di radiazione il 2° e 3° termine presentano un'operazione di **differenziazione sulle sorgenti** magnetiche $\underline{\mathbf{J}}_m$ e densità di carica elettriche ρ . Nella forma di Stratton-Chu tali differenziazione vengono rimosse (si veda nel seguito)

➤ Uso del metodo dei potenziali elettrodinamici

Nel caso di sorgenti sia elettriche $\underline{\mathbf{J}}$ che magnetiche $\underline{\mathbf{J}}_m$ in spazio libero, introdotti il potenziale vettore magnetico $\underline{\mathbf{A}}$ ed il potenziale vettore elettrico $\underline{\mathbf{F}}$ che si ricavano con il metodo della funzione di Green:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

$$\underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{r}}) = \int_V \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

in virtù della sovrapposibilità degli effetti, il campo e.m. si ottiene sommando quello ricavato da $\underline{\mathbf{A}}$ nel caso elettrico ($\underline{\mathbf{E}}^{(e)}$, $\underline{\mathbf{H}}^{(e)}$) e quello ricavato da $\underline{\mathbf{F}}$ nel caso magnetico ($\underline{\mathbf{E}}^{(m)}$, $\underline{\mathbf{H}}^{(m)}$):

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}^{(e)} + \underline{\mathbf{E}}^{(m)} = -j\omega\mu \underline{\mathbf{A}} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}}{j\omega\epsilon_c} - \nabla \times \underline{\mathbf{F}}$$

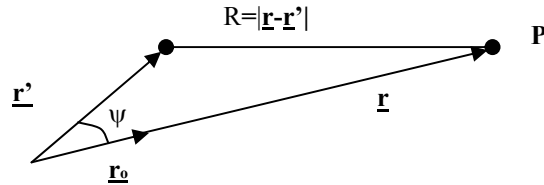
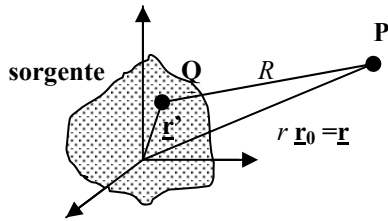
$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}^{(e)} + \underline{\mathbf{H}}^{(m)} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}} - j\omega\epsilon_c \underline{\mathbf{F}} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{F}}}{j\omega\mu}$$

2.6 REGIONI DI CAMPO VICINO E LONTANO

- La funzione di Green compare nelle espressioni del campo irradiato, calcolato sia mediante integrazione diretta che mediante i potenziali elettrodinamici.
- Come anticipato nel primo capitolo, sulla base di diverse approssimazioni dell'ampiezza e della fase della funzione di Green e dei campi, si individuano tre regioni dello spazio nell'intorno dell'antenna:
 - regione di campo vicino reattivo
 - regione di campo vicino radiativo o di Fresnel
 - regione di campo lontano radiativo o di Fraunhofer

$$G(\underline{r} - \underline{r}') = G(R) = \frac{1}{4\pi R} e^{-jkR}$$

dove in coordinate cartesiane $R = |\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$



2.6.a Approssimazione della distanza relativa osservatore-sorgente

Dalla figura, ricordando che $\underline{r} = r \underline{r}_0$, si ricava che la distanza relativa R è data da:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\underline{r} \cdot \underline{r}'} = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{\underline{r}_0 \cdot \underline{r}'}{r}} = r \sqrt{1 + \chi}$$

dove: $\chi = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{\underline{r}_0 \cdot \underline{r}'}{r}$.

Dallo sviluppo in serie di Taylor della radice per $\chi \ll 1$:

$$R = r \sqrt{1 + \chi} \cong r \left(1 + \frac{1}{2} \chi - \frac{1}{8} \chi^2 \right)$$

e considerando che:

$$\chi^2 = \left(\frac{r'}{r}\right)^4 + 4 \frac{(\underline{r}_0 \cdot \underline{r}')^2}{r^2} - 4 \frac{r'^2}{r^3} \underline{r}_0 \cdot \underline{r}'$$

si ottiene l'espressione approssimata al 2° ordine di R :

$$R = r \sqrt{1 + \chi} \cong r \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{1}{r} \underline{r}_0 \cdot \underline{r}' - \frac{1}{8} \left(\frac{r'}{r}\right)^4 - \frac{1}{2} \frac{(\underline{r}_0 \cdot \underline{r}')^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^3} \underline{r}_0 \cdot \underline{r}' \right]$$

Esplicitando i prodotti scalari, si ottiene:

$$R = r\sqrt{1+\chi} \cong r \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r'}{r} \cos \psi - \frac{1}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^4 - \frac{1}{2} \frac{r'^2 \cos^2 \psi}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^3} r' \cos \Psi \right] =$$

$$= r \left[1 - \frac{r'}{r} \cos \psi + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \sin^2 \psi + \frac{1}{2} \frac{r'^3}{r^3} \cos \Psi - \frac{1}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^4 \right]$$

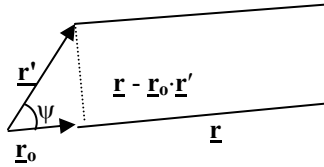
2.6.b Regione di campo lontano radiativo o zona di Fraunhofer

Fase della funzione di Green: approssimazione al 1° ordine:

per $k(r'/r)^2$ piccoli (si specificherà la distanza limite nel seguito) si considerano i soli termini di R/r costanti e variabili come $1/r$ (trascurando i termini variabili come $1/r^n$ con $n \geq 2$). Ciò implica che:

$$R_{far} = r \left[1 - \frac{1}{r} \underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}' \right] = r - \underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}'$$

Interpretazione geometrica:



Ampiezza della funzione di Green: per $r'/r \ll 1$, ovvero per $r \gg D$ (ove D è la massima dimensione dell'antenna) consideriamo l'approssimazione all'ordine zero, cioè:

$$r \gg D \quad \Rightarrow \quad R \cong r$$

Espressione della funzione di Green in campo lontano radiativo o zona di Fraunhofer:

$$G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \cong \frac{1}{4\pi r} e^{-jk(r - \underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}')}$$

2.6.c Regione di campo vicino radiativo o zona di Fresnel

Fase della funzione di Green: approssimazione al 2° ordine:

si considerano i soli termini di R/r costanti e variabili come $1/r$ e $1/r^2$ (trascurando i termini variabili come $1/r^n$ con $n \geq 3$). Ciò implica che:

$$R_{near} = r \left[1 - \frac{r'}{r} \cos \psi + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \sin^2 \psi \right] = r \left[1 - \frac{1}{r} \underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}' + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{(\underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}')^2}{r^2} \right] = r - \underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}' + \frac{r'^2}{2r} - \frac{(\underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}')^2}{2r}$$

In condizioni parassiali (i.e., nelle direzioni intorno a quella di puntamento dell'antenna) tali che $\psi \cong 90^\circ$, le potenze del prodotto scalare $\underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{r}}_o$ sono generalmente trascurabili, per cui R_{near} diventa:

$$R_{near} \cong r - \underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}' + \frac{r'^2}{2r}$$

Ampiezza della funzione di Green: approssimazione all'ordine zero, cioè:

$$r \gg D \quad \Rightarrow \quad R \cong r$$

Espressione della funzione di Green in campo vicino radiativo o zona di Fresnel:

$$G(\underline{r} - \underline{r}') \cong \frac{1}{4\pi r} e^{-jk \left(r - \underline{r}_o \cdot \underline{r}' + r'^2/2r \right)}$$

2.6.d Distanza limite tra regioni di campo vicino e lontano

➤ Distanza limite di campo lontano

Consideriamo l'espressione di R_{near} (al 2° ordine).

$$R_{\text{near}} = r - \underline{r}_o \cdot \underline{r}' + \frac{r'^2}{2r} \sin^2 \psi$$

E' possibile usare l'approssimazione di Fraunhofer quando si può trascurare il termine quadratico in r' (e implicitamente anche i termini di ordine superiore, che si annullano di conseguenza). Il **massimo** dell'errore di fase quadratico in r' dato da $\Delta\phi_F = kr'^2 \sin^2 \psi / 2r$ si ha per $\Psi = \pi/2$ (condizione parassiale) ed è pari a:

$$\Delta\phi_F \equiv k \frac{r'^2}{2r}$$

.Si può definire la *distanza limite* r_F tra la regione di Fraunhofer e quella di Fresnel come quella distanza per cui $\Delta\phi_F$ è inferiore ad un valore critico in radianti, generalmente compreso tra $\pi/8$ e $\pi/2$. Scegliendo $\Delta\phi_F = \pi/8$:

$$\Delta\phi_F = k \frac{r'^2}{2r_F} \leq \frac{\pi}{8}$$

Se r' rappresenta la metà della massima dimensione caratteristica D della sorgente (e.g., il raggio di un'apertura circolare), ponendo:

$$D \equiv 2r'$$

si ottiene:

$$r_F \geq \frac{8}{\pi} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(D/2)^2}{2}$$

da cui:

$$r_F \geq \frac{2D^2}{\lambda}$$

$$\text{Se } \Delta\phi = \frac{\pi}{4}, \text{ avremmo ottenuto: } r_F = \frac{D^2}{\lambda}$$

$$\text{Se } \Delta\phi = \frac{\pi}{2}, \text{ avremmo ottenuto: } r_F = \frac{D^2}{2\lambda}$$

2.6.e Espressioni della funzione di Green in campo lontano

Abbiamo ottenuto che:

$$G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \cong \left(\frac{1}{4\pi r} e^{-jkr} \right) e^{jk \underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}'}$$

Notiamo che:

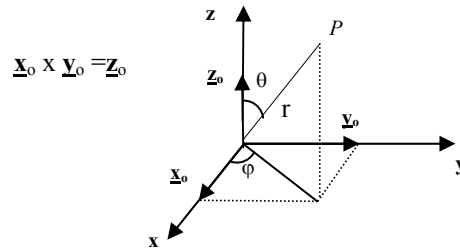
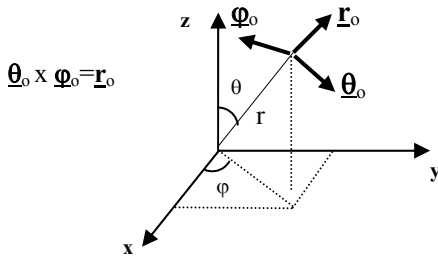
- il termine tra parentesi rappresenta un'onda sferica che si irradia dall'origine;
- il termine fuori parentesi rappresenta la correzione di fase dovuta alla dimensione finita della sorgente intorno all'origine del sistema di riferimento.

Esprimendo il vettore di osservazione in coordinate sferiche e quello delle sorgenti in coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{r}} = r \sin \theta \cos \varphi \underline{\mathbf{x}}_o + r \sin \theta \sin \varphi \underline{\mathbf{y}}_o + r \cos \theta \underline{\mathbf{z}}_o \\ \underline{\mathbf{r}}' = x' \underline{\mathbf{x}}_o + y' \underline{\mathbf{y}}_o + z' \underline{\mathbf{z}}_o \end{cases}$$

considerando che valgono:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{r}}_o = \sin \theta \cos \varphi \underline{\mathbf{x}}_o + \sin \theta \sin \varphi \underline{\mathbf{y}}_o + \cos \theta \underline{\mathbf{z}}_o \\ \underline{\boldsymbol{\theta}}_o = \cos \theta \cos \varphi \underline{\mathbf{x}}_o + \cos \theta \sin \varphi \underline{\mathbf{y}}_o - \sin \theta \underline{\mathbf{z}}_o \\ \underline{\boldsymbol{\varphi}}_o = -\sin \varphi \underline{\mathbf{x}}_o + \cos \varphi \underline{\mathbf{y}}_o \end{cases} \quad \text{con} \quad \underline{\mathbf{r}}_o \times \underline{\boldsymbol{\theta}}_o = \underline{\boldsymbol{\varphi}}_o \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{r}}_o \times \underline{\boldsymbol{\varphi}}_o = -\underline{\boldsymbol{\theta}}_o$$



si può scrivere:

$$G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \cong \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{jk(x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi + z' \cos \theta)}$$

Definendo il vettore di propagazione $\underline{\mathbf{k}}$ come:

$$\underline{\mathbf{k}} = k_x \underline{\mathbf{x}}_o + k_y \underline{\mathbf{y}}_o + k_z \underline{\mathbf{z}}_o = k \sin \theta \cos \varphi \underline{\mathbf{x}}_o + k \sin \theta \sin \varphi \underline{\mathbf{y}}_o + k \cos \theta \underline{\mathbf{z}}_o$$

si può scrivere in modo compatto:

$$G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \cong \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{j \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}'}$$

2.7 FORMULA DI RADIAZIONE E.M. MEDIANTE POTENZIALI

2.7.a Metodo dei potenziali in zona di Fraunhofer

- Ricordiamo come i potenziali vettori magnetico $\underline{\mathbf{A}}$ ed elettrico $\underline{\mathbf{F}}$ che si ricavano con il metodo della funzione di Green:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' \quad \underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{r}}) = \int_V \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

in virtù della sovrapposibilità degli effetti, il campo e.m. si ottiene sommando quello ricavato da $\underline{\mathbf{A}}$ nel caso elettrico ($\underline{\mathbf{E}}^{(e)}$, $\underline{\mathbf{H}}^{(e)}$) dovuti alle sole sorgenti elettriche $\underline{\mathbf{J}}$ e quello ricavato da $\underline{\mathbf{F}}$ nel caso magnetico ($\underline{\mathbf{E}}^{(m)}$, $\underline{\mathbf{H}}^{(m)}$) dovuti alle sole sorgenti magnetiche $\underline{\mathbf{J}}_m$:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}^{(e)} + \underline{\mathbf{E}}^{(m)} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{A}} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}}{j\omega\epsilon_c} - \nabla \times \underline{\mathbf{F}}$$

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}^{(e)} + \underline{\mathbf{H}}^{(m)} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}} - j\omega\epsilon_c \underline{\mathbf{F}} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{\mathbf{F}}}{j\omega\mu}$$

- Ricordiamo le espressioni del gradiente di uno scalare g , e della divergenza e del rotore di un vettore $\underline{\mathbf{a}}$ in coordinate sferiche

$$\nabla g(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{r}}_0 \frac{\partial g}{\partial r} + \underline{\boldsymbol{\theta}}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \vartheta} + \underline{\boldsymbol{\phi}}_0 \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (a_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

2.7.b Formula di radiazione in campo lontano mediante potenziali

➤ Campo magnetico a grande distanza nel caso elettrico

- Nel caso di sole correnti elettriche, una volta calcolato il potenziale vettore $\underline{\mathbf{A}}$ il campo magnetico $\underline{\mathbf{H}}^{(e)}$ vale:

$$\underline{\mathbf{H}}^{(e)} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \nabla \times \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \int_V \nabla \times [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')] d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \int_V \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \times \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

L'ultima eguaglianza discende dal fatto che, considerando che l'operatore ∇ opera su $\underline{\mathbf{r}}$ (punto di osservazione), mentre l'integrazione è effettuata rispetto alla variabile $\underline{\mathbf{r}}'$ (punto di sorgente) risulta $\nabla \times \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') = 0$ e pertanto si ha:

$$\nabla \times [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')] = G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \nabla \times \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') - \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \times \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') = -\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \times \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') = \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \times \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}')$$

- A grande distanza, sostituendo l'espressione approssimata della funzione di Green, il potenziale vettore magnetico dipende solo dalla distanza r del punto di sorgente (ed è indipendente da ϑ e φ):

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' \cong \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

- Assumendo r molto grande, nel seguito trascuriamo i termini proporzionali ad $1/r^n$ (con $n>1$) rispetto a quelli proporzionali a $1/r$. $G(\underline{r}-\underline{r}')$ è funzione della sola distanza r del punto di sorgente (indipendente da ϑ e ϕ). Se $k \ll 1/r$, ovvero $r \gg \lambda$, si ottiene che ∇G è diretto come \underline{r}_0 :

$$\nabla G(\underline{r}-\underline{r}') \cong \underline{r}_0 \left\{ e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right] \right\} = \left(-jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \underline{r}_0 \cong -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \underline{r}_0$$

- Conseguentemente l'espressione finale di $\underline{H}^{(e)}$ a grande distanza diventa la seguente:

$$\underline{H}^{(e)} = \nabla \times \underline{A} = \int_V \nabla G(\underline{r}-\underline{r}') \times \underline{J}(\underline{r}') d^3 r' \cong -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \underline{r}_0 \times \left[\int_V \underline{J}(\underline{r}') e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3 r' \right] = -jk \underline{r}_0 \times \underline{A}$$

Notiamo che l'operazione di rotore rispetto al punto di sorgente corrisponde ad una moltiplicazione vettoriale a sinistra per $-jk\underline{r}_0$ e che $\underline{H}^{(e)}$ risulta ortogonale a \underline{r}_0 .

➤ Campo elettrico a grande distanza nel caso elettrico

- Per il calcolo di $\underline{E}^{(e)}$, consideriamo a grande distanza le seguenti espressioni approssimate a meno di termini con potenze di $1/r$ superiori:

$$\nabla \cdot \underline{A} \approx \frac{\partial A_r}{\partial r} \approx -jk A_r$$

$$\nabla \nabla \cdot \underline{A} \approx \underline{r}_0 \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} = (-jk)^2 A_r \underline{r}_0 = -k^2 A_r \underline{r}_0 = -\omega^2 \mu \epsilon_c A_r \underline{r}_0$$

- Sostituendo nell'espressione del campo elettrico, si osserva che i termini delle componenti radiali si annullano e rimane solo la componente trasversa ortogonale al versore \underline{r}_0 , cioè:

$$\underline{E}^{(e)}(\underline{r}) = -j\omega\mu \underline{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{A}}{j\omega\epsilon_c} \cong -j\omega\mu \underline{A} - \frac{\omega^2 \mu \epsilon_c A_r}{j\omega\epsilon_c} \underline{r}_0 = -j\omega\mu \underline{A} + j\omega\mu A_r \underline{r}_0 = -j\omega\mu (\underline{A} - A_r \underline{r}_0)$$

Dalla regola $\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C} = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}(\underline{A} \cdot \underline{B})$ discende $\underline{r}_0 \times \underline{r}_0 \times \underline{A} = \underline{r}_0(\underline{r}_0 \cdot \underline{A}) - \underline{A}(\underline{r}_0 \cdot \underline{r}_0) = A_r \underline{r}_0 - \underline{A}$ e pertanto:

$$\underline{E}^{(e)}(\underline{r}) \cong -j\omega\mu (\underline{A} - A_r \underline{r}_0) = j\omega\mu \underline{r}_0 \times \underline{r}_0 \times \underline{A} = \frac{j\omega\mu}{-jk} \underline{r}_0 \times (-jk) \underline{r}_0 \times \underline{A} = -\eta \underline{r}_0 \times \underline{H}^{(e)}$$

Nota

- Per il calcolo di $\underline{E}^{(e)}$ a grande distanza possiamo anche avvalerci della seconda equazione di Maxwell, considerando che nel punto di osservazione non ci sono sorgenti:

$$\nabla \times \underline{H} = \nabla \times \nabla \times \underline{A} = j\omega\epsilon_c \underline{E}$$

Conservando solo termini con potenze di $1/r$ di grado inferiore, l'operazione di rotore si riduce ancora alla moltiplicazione vettoriale a sinistra per $-jk\underline{r}_0$. E dalla seconda eq. di Maxwell si ottiene nuovamente:

$$\underline{E}^{(e)}(\underline{r}) \cong \frac{\nabla \times (-jk \underline{r}_0 \times \underline{A})}{j\omega\epsilon_c} \cong \frac{(-jk)^2}{j\omega\epsilon_c} \underline{r}_0 \times (\underline{r}_0 \times \underline{A}) = \frac{-jk}{j\omega\epsilon_c} \underline{r}_0 \times \underline{H}^{(e)} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \underline{r}_0 \times \underline{H}^{(e)} = -\eta \underline{r}_0 \times \underline{H}^{(e)}$$

➤ Campo e.m a grande distanza nel caso generale

- Pertanto abbiamo ottenuto che la soluzione del campo a grande distanza scritta a partire dal potenziale vettore magnetico nel caso di sole sorgenti elettriche:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{H}}^{(e)} \cong -jk\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\mathbf{E}}^{(e)} \cong -j\omega\mu(\underline{\mathbf{A}} - A_r\mathbf{r}_o) = -\eta\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{H}}^{(e)} \end{cases} \quad \text{con} \quad \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \cong \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \int_V \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'$$

- Scriviamo, per dualità, la soluzione a partire dal potenziale vettore elettrico $\underline{\mathbf{F}}$ nel caso di sole sorgenti magnetiche $\underline{\mathbf{J}}_m$:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{H}}^{(m)} \cong +j\omega\epsilon(\underline{\mathbf{F}} - F_r\mathbf{r}_o) = \frac{1}{\eta}\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{E}}^{(m)} \\ \underline{\mathbf{E}}^{(m)} \cong +jk\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{F}} = -\eta\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{H}}^{(m)} \end{cases} \quad \text{con} \quad \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_{\tau} \underline{\mathbf{J}}_m(\mathbf{r}') e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'$$

- Sommiamo i campi elettrici in presenza delle sole correnti elettriche e delle sole correnti magnetiche per la linearità delle eq. di Maxwell nel mezzo considerato:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &\cong j\omega\mu\mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{A}} + jk\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{F}} = -\eta\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &\cong -jk\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{A}} + j\omega\epsilon(\underline{\mathbf{F}} - F_r\mathbf{r}_o) \end{aligned}$$

- E' stato trovato quindi che a grande distanza (zona di Fraunhofer):

- si propaga un'onda sferica con fase ed ampiezza costanti su superfici sferiche di raggio r
- il campo elettrico, come quello magnetico, non ha componenti radiali ($E_r=H_r=0$), cioè risulta essere un'onda sferica localmente piana uniforme (o trasversa elettromagnetica, TEM) ed i vettori $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{H}}$ formano una terna ortogonale con il versore \mathbf{r}_o .
- Il rapporto tra i moduli del campo elettrico e magnetico è pari all'impedenza caratteristica del mezzo η

- Introduciamo le espressioni approssimate dei potenziali vettori:

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = +\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V \mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{J}} e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' + \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V \mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{J}}_m e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'$$

- Considerando le seguenti relazioni vettoriali di facile dimostrazione:

$$\mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{J}}_m = \mathbf{r}_o \times [J_{m\theta}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\theta}}_o + J_{m\phi}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\phi}}_o + J_{mr}(\mathbf{r}')\mathbf{r}_o] = J_{m\theta}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\phi}}_o - J_{m\phi}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\theta}}_o$$

$$\mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o \times \underline{\mathbf{J}} = \mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o \times [J_{\theta}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\theta}}_o + J_{\phi}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\phi}}_o + J_r(\mathbf{r}')\mathbf{r}_o] = \mathbf{r}_o \times [J_{\theta}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\phi}}_o - J_{\phi}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\theta}}_o] = -J_{\theta}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\theta}}_o - J_{\phi}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\phi}}_o$$

Si ricava l'espressione del campo $\underline{\mathbf{E}}$ in zona di Fraunhofer:

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V [J_{\theta}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\theta}}_o + J_{\phi}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\phi}}_o] e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' - \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V [-J_{m\theta}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\phi}}_o + J_{m\phi}(\mathbf{r}')\underline{\boldsymbol{\theta}}_o] e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'$$

Mentre le espressioni delle diverse componenti del campo sono:

$$E_r(\underline{\mathbf{r}}) = 0$$

$$E_\theta(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_\theta(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\mathbf{k}\cdot\underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}' - \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_{m\varphi}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\mathbf{k}\cdot\underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}'$$

$$E_\varphi(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_\varphi(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\mathbf{k}\cdot\underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}' + \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_{m\theta}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\mathbf{k}\cdot\underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}'$$

Note

- Nell'espressione del campo lontano, la **dipendenza dalla distanza** è solo nel termine di onda sferica per cui l'ampiezza del campo varia come $1/r$ e la fase come kr .
- La **dipendenza angolare** del campo lontano è espressa principalmente dagli integrali, la cui variazione angolare è rapida in quanto gli angoli compaiono come argomento di funzioni esponenziali complesse.
- Poiché la relazioni tra i versori del sistema di coordinate sferiche e quelle cartesiane sono:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{r}}_o = \sin\theta \cos\varphi \underline{\mathbf{x}}_o + \sin\theta \sin\varphi \underline{\mathbf{y}}_o + \cos\theta \underline{\mathbf{z}}_o \\ \underline{\boldsymbol{\theta}}_o = \cos\theta \cos\varphi \underline{\mathbf{x}}_o + \cos\theta \sin\varphi \underline{\mathbf{y}}_o - \sin\theta \underline{\mathbf{z}}_o \\ \underline{\boldsymbol{\varphi}}_o = -\sin\varphi \underline{\mathbf{x}}_o + \cos\varphi \underline{\mathbf{y}}_o \end{cases}$$

risulta che le componenti in coordinate sferiche di $\underline{\mathbf{J}}_m$ sono legate a quelle in coordinate cartesiane tramite:

$$\begin{cases} J_{m\theta} = \underline{\mathbf{J}}_m \cdot \underline{\boldsymbol{\theta}}_o = J_{mx} \cos\theta \cos\varphi + J_{my} \cos\theta \sin\varphi + J_{mz} \sin\theta \\ J_{m\varphi} = \underline{\mathbf{J}}_m \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}_o = -J_{mx} \sin\varphi + J_{my} \cos\varphi \end{cases}$$

- e analogamente per le componenti di $\underline{\mathbf{J}}$. Introducendo le sorgenti in coordinate cartesiane J_x, J_y, J_{mx} e J_{my} la **dipendenza angolare** è legata anche a fattori del tipo *seno* e *coseno* ma la loro variazione è più lenta.
- La struttura delle componenti del campo a grande distanza è del tipo:

$$E_i(\underline{\mathbf{r}}) = \sum_j \text{coef}_j(r, \theta, \varphi) \int_V J_j(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\mathbf{k}\cdot\underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}'$$

ove $\text{coef}(r, \theta, \varphi)$ rappresenta una funzione della distanza e della direzione di osservazione, mentre il nucleo di integrazione è quello della **trasformata di Fourier spaziale**. In definitiva le componenti del campo irradiato sono proporzionali alla combinazione delle trasformate di Fourier spaziali di opportune componenti delle sorgenti.

- Le espressioni del campo *in zona di Fresnel* differiscono solo per la forma del nucleo degli integrali, che presenta una fase con termini anche quadratici. Inoltre, la dipendenza dalla distanza r è contenuta anche negli integrali stessi a causa del termine quadratico nella fase della funzione di Green del tipo $kr^2/2r$.

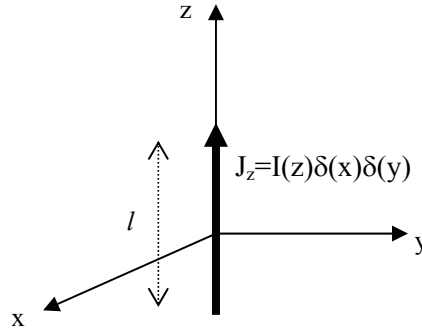
$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V [J_\theta(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\boldsymbol{\theta}}_o + J_\varphi(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\boldsymbol{\varphi}}_o] e^{j\mathbf{k}\cdot\underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}' - \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V [-J_{m\theta}(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\boldsymbol{\varphi}}_o + J_{m\varphi}(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\boldsymbol{\theta}}_o] e^{j\mathbf{k}\cdot\underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}'$$

2.7.c Caso di sorgenti elettriche lineari

- Consideriamo una distribuzione di correnti elettriche nella direzione z:

$$\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') = J_z(\underline{\mathbf{r}}')\underline{\mathbf{z}}_o$$

che irradiano nello spazio libero all'interno di un volume V cilindrico allineato lungo z e di dimensioni trasversali (sezione) molto piccole rispetto a λ (al limite infinitesime). Il potenziale vettore $\underline{\mathbf{A}}$, essendo parallelo a $\underline{\mathbf{J}}$, è evidentemente diretto lungo z.



➤ Potenziale magnetico a grande distanza

- In campo lontano, si ha:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = A_z(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{z}}_o = \underline{\mathbf{z}}_o \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \iiint_V J_z(\underline{\mathbf{r}}) e^{jk\underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}'$$

- Se supponiamo che le correnti scorrano lungo un cilindro di lunghezza l , centrato nell'origine ed estremamente sottile rispetto alla lunghezza d'onda (come indicato nella figura), si può approssimare la fase dell'integrando:

$$k\underline{\mathbf{r}}_o \cdot \underline{\mathbf{r}}' = \frac{2\pi}{\lambda} (x' \sin \vartheta \cos \varphi + y' \sin \vartheta \sin \varphi + z' \cos \vartheta) \approx \frac{2\pi}{\lambda} z' \cos \vartheta$$

Pertanto, operando l'integrazione rispetto a (x', y') :

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = A_z(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{z}}_o = \underline{\mathbf{z}}_o \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \iint_S J_z(x', y', z') dx' dy' e^{jkz' \cos \vartheta} dz'$$

ed essendo il flusso di J_z attraverso la sezione del cilindro pari alla corrente $I(z)$, si ha:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = A_z(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{z}}_o = \underline{\mathbf{z}}_o \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I(z') e^{jkz' \cos \vartheta} dz'$$

- Tale risultato si ricava anche considerando un filamento sottile di corrente espresso con la relazione:

$$J_z(x', y', z') = I(z') \delta(x') \delta(y')$$

ovvero mediante distribuzioni di Dirac (ciascuna nelle dimensioni metro⁻¹, essendo I in Ampere e J_z in A/m²) rispetto alle coordinate trasverse del volume cilindrico.

➤ Campo e.m. a grande distanza

- Il calcolo si effettua come nel caso generale precedente assumendo r molto grande, e conservando solo i termini che vanno come $1/r$ rispetto a quelli con potenze superiori. In questo caso considerando il legame tra componenti cartesiane e polari di un vettore, si può scrivere:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = A_z(\underline{\mathbf{r}}) \underline{\mathbf{z}}_o = -A_z \sin \vartheta \underline{\mathbf{g}}_o + A_z \cos \vartheta \underline{\mathbf{r}}_o$$

Ricordiamo le espressioni della divergenza di un vettore $\underline{\mathbf{a}}$ e del gradiente di uno scalare g in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\mathbf{a}} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (a_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\ \nabla g &= \underline{\mathbf{r}}_o \frac{\partial g}{\partial r} + \underline{\mathbf{g}}_o \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \vartheta} + \underline{\mathbf{g}}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

- Pertanto si ottengono nuovamente le seguenti espressioni approssimate, a parte termini con potenze di $1/r$ superiori:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} \approx \frac{\partial A_r}{\partial r} = \cos \vartheta \frac{\partial A_z}{\partial r} \approx -jk \cos \vartheta A_z$$

$$\nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} \approx \underline{\mathbf{r}}_o \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} = (-jk)^2 A_r \underline{\mathbf{r}}_o = -k^2 A_r \underline{\mathbf{r}}_o = -\omega^2 \mu \varepsilon_c A_r \underline{\mathbf{r}}_o = -\omega^2 \mu \varepsilon_c \cos \vartheta A_z \underline{\mathbf{r}}_o$$

- Sostituendo nell'espressione di $\underline{\mathbf{E}}$, i due termini con la componente radiale si annullano e rimane solo la componente zenitale, cioè:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \cong -j\omega\mu\underline{\mathbf{A}} - \frac{\omega^2 \mu \varepsilon_c A_r}{j\omega \varepsilon_c} \underline{\mathbf{r}}_o = j\omega\mu A_z \sin \vartheta \underline{\mathbf{g}}_o - j\omega\mu A_z \cos \vartheta \underline{\mathbf{r}}_o + j\omega\mu \cos \vartheta A_z \underline{\mathbf{r}}_o = j\omega\mu A_z \sin \vartheta \underline{\mathbf{g}}_o$$

ovvero:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{g}}_o j\omega\mu \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I(z') e^{jkz' \cos \vartheta} dz' = \underline{\mathbf{g}}_o j \frac{\eta}{2\lambda r} \sin \vartheta e^{-jkr} \int_{-l/2}^{l/2} I(z') e^{jkz' \cos \vartheta} dz'$$

- Viene definito **momento elettrico N_z del dipolo** il seguente integrale pari alla trasformata di Fourier (calcolata in $k \cos \vartheta$) monodimensionale della corrente:

$$N_z(\vartheta) = \int_{-l/2}^{l/2} I(z') e^{-jkz' \cos \vartheta} dz'$$

per cui si può riscrivere l'unica componente E_ϑ non nulla del campo elettrico nella seguente forma :

$$E_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) = \frac{j\eta e^{-jkr}}{2\lambda r} \sin \vartheta N_z(\vartheta)$$

Note

- Si osserva come il campo risulta espresso da una relazione che contiene la trasformata di Fourier monodimensionale della corrente lungo la direzione z .
- Il campo magnetico $\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}})$ a grande distanza si può ricavare dal potenziale ($\underline{\mathbf{H}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$) o dalla I eq. di Maxwell.

- Si ricava nuovamente che il campo magnetico è ortogonale a \underline{r}_0 e \underline{E} e risulta: $E/H=\eta$, dove η è l'impedenza caratteristica del mezzo.
- La relazione che fornisce il campo a grande distanza di una distribuzione di corrente lineare filiforme può essere ottenuta anche considerando l'antenna costituita da tanti dipoli elementari e sommando il campo dovuto a ciascun dipolo elementare (di Hertz) di lunghezza infinitesima dz' in zona di Fraunhofer.

2.8 FORMULA DI RADIAZIONE DI STRATTON-CHU

Ricordiamo la *formula di radiazione* ottenuta per diretta integrazione della eq. di Helmholtz vettoriale per il campo, in termini di sorgenti elettriche e magnetiche in un mezzo lineare, isotropo e omogeneo:

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \int_V \underline{J}(\underline{r}') G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}' - \frac{1}{\epsilon_c} \int_V [\nabla' \rho(\underline{r}')] G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}' - \int_V [\nabla' \times \underline{J}_m(\underline{r}')] G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}'$$

ove l'operatore differenziale ∇' opera rispetto al vettore \underline{r}' di posizione delle sorgenti.

Note

- Avendo indicato con ∇ l'operatore differenziale che opera rispetto al vettore \underline{r} di osservazione, quando lo si applica alla funzione di Green si ha:

$$\nabla G(R) = \nabla G(\underline{r} - \underline{r}') = -\nabla' G(\underline{r} - \underline{r}')$$

- Nella formula di radiazione sarebbe conveniente *trasformare il 2° termine*, esprimendolo in termini di densità di correnti elettriche \underline{J} (già presenti nel 1° termine).

2.8.a Eliminazione della differenziazione sulle sorgenti

➤ Trasformazione del 2° termine

Dalla seguente identità di analisi vettoriale:

$$\nabla'(\psi\phi) = \psi\nabla'(\phi) + \phi\nabla'(\psi)$$

si ha:

$$\int_V \nabla'[\rho(\underline{r}') G(\underline{r} - \underline{r}')] d^3 \underline{r}' = \int_V \rho(\underline{r}') \nabla' G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}' + \int_V G(\underline{r} - \underline{r}') \nabla' \rho(\underline{r}') d^3 \underline{r}'$$

ovvero, esplicitando per il 2° termine della formula di radiazione:

$$\int_V [\nabla' \rho(\underline{r}')] G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}' = \int_V \nabla'[\rho(\underline{r}') G(\underline{r} - \underline{r}')] d^3 \underline{r}' - \int_V \rho(\underline{r}') \nabla' G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}'$$

Ma, se S è la superficie che racchiude V con \underline{n}_0 normale uscente, per il lemma di Green sul gradiente:

$$\int_V \nabla \psi d^3 \underline{r}' = \oint_S \underline{n}_0 \psi d^2 \underline{r}'$$

Se $S \rightarrow \infty$, ovvero se il volume V si estende all'infinito, per la condizione di radiazione all'infinito (per cui sulla superficie all'infinito non possono esistere cariche), si ha:

$$\int_{V \rightarrow \infty} \nabla' [\rho(\underline{r}') G(\underline{r} - \underline{r}')] d^3 \underline{r}' = \int_{S \rightarrow \infty} \underline{n}_o \rho(\underline{r}') G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}' = 0$$

per cui, usando l'identità $\nabla' G = -\nabla G$, si ottiene un'espressione per il 2° termine in cui l'operatore differenziale non opera sulle sorgenti:

$$\int_V [\nabla' \rho(\underline{r}')] G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}' = \int_V \rho(\underline{r}') \nabla G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}'$$

➤ Trasformazione del 3° termine

Dalla seguente identità di analisi vettoriale:

$$\nabla' \times (\psi \underline{a}) = \psi \nabla' \times \underline{a} - \underline{a} \times \nabla' \psi$$

si ha:

$$\int_V \nabla' \times [\underline{J}_m(\underline{r}') G(\underline{r} - \underline{r}')] d^3 \underline{r}' = \int_V G(\underline{r} - \underline{r}') \nabla' \times \underline{J}_m(\underline{r}') d^3 \underline{r}' - \int_V \underline{J}_m(\underline{r}') \times \nabla' G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}'$$

ovvero, esplicitando per il 3° termine della formula di radiazione

$$\int_V [\nabla' \times \underline{J}_m(\underline{r}')] G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}' = \int_V \nabla' \times [\underline{J}_m(\underline{r}') G(\underline{r} - \underline{r}')] d^3 \underline{r}' + \int_V \underline{J}_m(\underline{r}') \times \nabla' G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}'$$

Ma, se S è la superficie che racchiude V con \underline{n}_o normale uscente, per il lemma di Green sul rotore:

$$\int_V \nabla \times \underline{a} d^3 \underline{r}' = \oint_S \underline{n}_o \times \underline{a} d^2 \underline{r}'$$

Se $S \rightarrow \infty$, ovvero V si estende all'infinito, per la condizione di radiazione all'infinito (per cui sulla superficie all'infinito non possono esistere densità di corrente), si ha:

$$\int_{V \rightarrow \infty} \nabla' \times [\underline{J}_m(\underline{r}') G(\underline{r} - \underline{r}')] d^3 \underline{r}' = \int_{S \rightarrow \infty} \underline{n}_o \times [\underline{J}_m(\underline{r}') G(\underline{r} - \underline{r}')] d^2 \underline{r}' = 0$$

per cui, usando l'identità $\nabla' G = -\nabla G$, si ottiene un'espressione per il 3° termine in cui l'operatore differenziale non opera sulle sorgenti:

$$\int_V \nabla' \times \underline{J}_m(\underline{r}') G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}' = - \int_V \underline{J}_m(\underline{r}') \times \nabla G(\underline{r} - \underline{r}') d^3 \underline{r}'$$

➤ Espressione della formula di radiazione

Quindi, sostituendo le espressioni trasformate del 2° e 3° termine, si può riscrivere:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\mu \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' - \frac{1}{\epsilon_c} \int_V \rho(\underline{\mathbf{r}}') \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \int_V \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}') \times \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

2.8.b Sostituzione della densità di carica

Dall'eq. di continuità della corrente elettrica, si ha:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = -j\omega\rho \quad \Rightarrow \quad \rho = -\frac{\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}}{j\omega}$$

Per cui, sostituendo nel 2° termine della formula di radiazione, si ha:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\mu \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \int_V \nabla' \cdot \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \int_V \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}') \times \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Consideriamo l'integrale del 2° termine, che riscriviamo in coordinate cartesiane secondo i versori $\underline{\mathbf{x}}_{oi}$:

$$\int_V [\nabla' \cdot \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}')] \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \sum_{i=1}^3 \underline{\mathbf{x}}_{oi} \int_V [\nabla' \cdot \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}')] \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

avendo espresso il gradiente di G attraverso:

$$\nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') = \sum_{i=1}^3 \underline{\mathbf{x}}_{oi} \frac{\partial}{\partial x_i} G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \equiv \sum_{i=1}^3 \underline{\mathbf{x}}_{oi} \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')$$

Utilizzando l'identità vettoriale:

$$\nabla' \cdot (\underline{\mathbf{a}}\psi) = \underline{\mathbf{a}} \cdot \nabla' \psi + \psi \nabla' \cdot \underline{\mathbf{a}}$$

si può scrivere:

$$\int_V \nabla' \cdot [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')] d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla' \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \int_V \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') [\nabla' \cdot \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}')] d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

ovvero, esplicitando l'integrale del 2° termine relativamente ad un singolo termine della sommatoria nel modo seguente:

$$\int_V [\nabla' \cdot \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}')] \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \int_V \nabla' \cdot [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')] d^3 \underline{\mathbf{r}}' - \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla' \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Ma, se S è la superficie che racchiude V con $\underline{\mathbf{n}}_o$ normale uscente, per il lemma di Green sulla divergenza:

$$\int_V \nabla \cdot \underline{\mathbf{a}} d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \oint_S \underline{\mathbf{n}}_o \cdot \underline{\mathbf{a}} d^2 \underline{\mathbf{r}}'$$

Se $S \rightarrow \infty$, ovvero V occupa l'intero spazio, per la condizione di radiazione all'infinito (per cui sulla superficie all'infinito non possono esistere densità di corrente), si ha:

$$\int_{V \rightarrow \infty} \nabla' \cdot [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')] d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \int_{S \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{n}}_o \cdot [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')] d^2 \underline{\mathbf{r}}' = 0$$

per cui, usando l'identità $\nabla' G = -\nabla G$, si ottiene un'espressione per il 2° termine della formula di radiazione:

$$\sum_{i=1}^3 \underline{\mathbf{x}}_{oi} \int_V [\nabla' \cdot \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}')] \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = - \sum_{i=1}^3 \underline{\mathbf{x}}_{oi} \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla' \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \sum_{i=1}^3 \underline{\mathbf{x}}_{oi} \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Sviluppando in coordinate cartesiane l'ultimo prodotto scalare, cioè esplicitando $\underline{\mathbf{J}}$, ∇ e ∇_i , si ricava che:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \underline{\mathbf{x}}_{oi} \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' &= \int_V \sum_{i=1}^3 \underline{\mathbf{x}}_{oi} \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \\ &= \int_V \underline{\mathbf{x}}_o (J_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} G + J_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} G + J_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} G) d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \\ &+ \int_V \underline{\mathbf{y}}_o (J_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} G + J_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} G + J_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} G) d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \\ &+ \int_V \underline{\mathbf{z}}_o (J_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} G + J_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} G + J_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} G) d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \\ &= \int_V (J_x \frac{\partial}{\partial x} + J_y \frac{\partial}{\partial y} + J_z \frac{\partial}{\partial z}) (\underline{\mathbf{x}}_o \frac{\partial G}{\partial x} + \underline{\mathbf{y}}_o \frac{\partial G}{\partial y} + \underline{\mathbf{z}}_o \frac{\partial G}{\partial z}) d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \int_V [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla] \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' \end{aligned}$$

Quindi, la sommatoria degli integrali di volume si può esprimere nel modo seguente:

$$\sum_{i=1}^3 \underline{\mathbf{x}}_{oi} \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla \nabla_i G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \int_V [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla] \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

2.8.c Formula di radiazione di Stratton-Chu

Sostituendo quanto ottenuto nei passi precedenti, si giunge alla formula finale di radiazione di Stratton-Chu per sorgenti che irradiano in spazio libero riempito da un mezzo lineare, isotropo e omogeneo:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\mu \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \int_V [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla] \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \int_V \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}') \times \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Note

- Tale formula ha il pregio di esprimere il campo in termini di soli integrali delle sorgenti espresse come densità di corrente elettrica e magnetica.
- Per poter calcolare gli integrali, occorre sostituire l'espressione della funzione di Green G , ovvero sue opportune approssimazioni.

2.9 FORMULA DI STRATTON-CHU IN CAMPO LONTANO

Esprimiamo la *formula di radiazione* di Stratton-Chu, precedentemente ricavata:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\mu \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \int_V [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \nabla] \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \int_V \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}') \times \nabla G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

in campo lontano, esplicitando la funzione di Green in zona di Fraunhofer:

$$G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') = G(r, \psi) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} = \frac{e^{-jkr + jkr' \cos \psi}}{4\pi r}$$

e sviluppiamo gli integrandi con opportune approssimazioni coerenti con le condizioni di campo lontano.

2.9.a Calcolo approssimato dei termini differenziali

➤ Calcolo del termine ∇G

In un conveniente sistema di coordinate $(\underline{\mathbf{r}}_o, \underline{\Psi}_o)$, la funzione di Green si scrive:

$$\nabla G(r, \psi) = \frac{\partial G}{\partial r} \underline{\mathbf{r}}_o + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \psi} \underline{\Psi}_o$$

e il suo gradiente:

$$\nabla G = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{r(-jk) - 1}{r^2} e^{-jkr + jkr' \cos \psi} \underline{\mathbf{r}}_o + \frac{(-jkr' \sin \psi)}{r^2} e^{-jkr + jkr' \cos \psi} \underline{\Psi}_o \right]$$

Ritenendo solo i termini proporzionali a $1/r$:

$$\nabla G \cong -\underline{\mathbf{r}}_o \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr + jkr' \cos \psi} = -jkG \underline{\mathbf{r}}_o$$

➤ Calcolo del termine $(\underline{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \nabla G$

$$(\underline{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \nabla G = \left(J_r \frac{\partial}{\partial r} + J_\psi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) (-jkG \underline{\mathbf{r}}_o)$$

Analogamente a prima, per ritenere solo i termini proporzionali a $1/r$, è sufficiente considerare la derivazione rispetto a r :

$$(\underline{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \nabla G \cong J_r \frac{\partial G}{\partial r} (-jk \underline{\mathbf{r}}_o) \cong J_r (-jkG) (-jk \underline{\mathbf{r}}_o) = -J_r k^2 G \underline{\mathbf{r}}_o =$$

Da cui:

$$(\underline{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \nabla G \cong -k^2 (\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{r}}_o) G \underline{\mathbf{r}}_o$$

2.9.b Formula di radiazione in zona di Fraunhofer

Sostituendo quanto ottenuto nella formula di radiazione:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\mu \int_V \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' - \frac{k^2}{j\omega\epsilon_c} \int_V [\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \underline{\mathbf{r}}_o] \underline{\mathbf{r}}_o G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' - jk \int_V [\underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}') \times \underline{\mathbf{r}}_o] G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Ma: $\frac{k^2}{j\omega\epsilon_c} = \frac{\omega^2 \mu \epsilon_c}{j\omega\epsilon_c} = -j\omega\mu$, per cui si nota che si elidono, perché uguali e opposti, le componenti radiali del 1° termine e quelle del 2° termine:

$$-j\omega\mu \int_V (J_r \underline{\mathbf{r}}_o + J_\theta \underline{\boldsymbol{\theta}}_o + J_\varphi \underline{\boldsymbol{\Phi}}_o) G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' + j\omega\mu \int_V J_r \underline{\mathbf{r}}_o G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}' = -j\omega\mu \int_V (J_\theta \underline{\boldsymbol{\theta}}_o + J_\varphi \underline{\boldsymbol{\Phi}}_o) G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Inoltre, in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{J}} &= J_r \underline{\mathbf{r}}_o + J_\theta \underline{\boldsymbol{\theta}}_o + J_\varphi \underline{\boldsymbol{\Phi}}_o \\ \underline{\mathbf{J}}_m &= J_{mr} \underline{\mathbf{r}}_o + J_{m\theta} \underline{\boldsymbol{\theta}}_o + J_{m\varphi} \underline{\boldsymbol{\Phi}}_o \end{aligned} \quad \text{con} \quad \underline{\mathbf{r}}_o \times \underline{\boldsymbol{\theta}}_o = \underline{\boldsymbol{\Phi}}_o \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{r}}_o \times \underline{\boldsymbol{\Phi}}_o = -\underline{\boldsymbol{\theta}}_o.$$

Allora, nel terzo termine della formula di radiazione, si può esplicitare il prodotto vettore:

$$\underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}') \times \underline{\mathbf{r}}_o = -J_{m\theta}(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\boldsymbol{\Phi}}_o + J_{m\varphi}(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\boldsymbol{\theta}}_o$$

Quindi, introducendo l'espressione della funzione di Green in campo lontano si ottiene quanto già ricavato:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V [J_\theta(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\boldsymbol{\theta}}_o + J_\varphi(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\boldsymbol{\Phi}}_o] e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}' - \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V [-J_{m\theta}(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\boldsymbol{\Phi}}_o + J_{m\varphi}(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\boldsymbol{\theta}}_o] e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Mentre per le espressioni delle diverse componenti del campo in zona di Fraunhofer sono:

$$E_r(\underline{\mathbf{r}}) = 0$$

$$E_\theta(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_\theta(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}' - \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_{m\varphi}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

$$E_\varphi(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_\varphi(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_{m\theta}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$