

6.1 ANTENNA IN RICEZIONE

Le grandezze introdotte finora per caratterizzare un'antenna (direttività, diagramma di radiazione, funzione di radiazione) facevano riferimento alle proprietà dell'antenna in trasmissione. Le grandezze che caratterizzano invece l'antenna funzionante in ricezione sono l'area equivalente e la lunghezza equivalente. Abbiamo già detto tuttavia come tali grandezze definite per l'antenna in ricezione non sono indipendenti da quelle definite in trasmissione, anzi sono derivabili direttamente da queste ultime. L'antenna è pertanto un dispositivo che ha caratteristiche di reciprocità e se ha una direzione prevalente di trasmissione è anche massima la potenza ricevuta da quella stessa direzione.

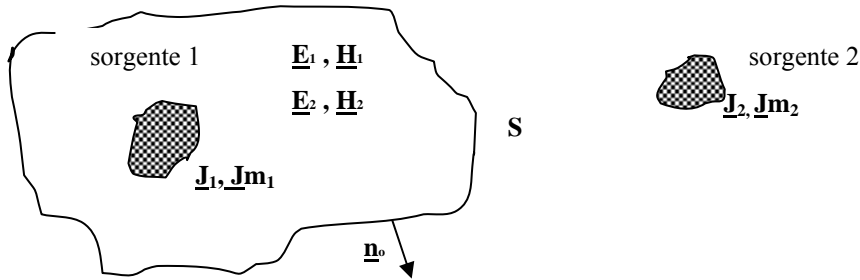
In ricezione si assume la presenza di un campo incidente sull'antenna ricevente generato da sorgenti a grande distanza e pertanto costituito da un'onda TEM localmente piana; si assume che il campo prodotto da tali sorgenti non sia perturbato dalla presenza dell'antenna. Sotto tali ipotesi abbiamo assunto che la potenza prelevata dall'antenna e trasferibile al carico utilizzatore è proporzionale al vettore di Poynting dell'onda piana incidente ed è legata all'area equivalente A_{eq} dell'antenna stessa definita secondo la seguente relazione:

$$W_R = P_i A_{eq} \quad (6.1)$$

Si dimostra che l'area equivalente A_{eq} dell'antenna è legata alla direttività della stessa antenna operante in trasmissione secondo la relazione universale:

$$A_{eq} = (\lambda^2 / 4\pi) D \quad (6.2)$$

Questo deriva direttamente dal Teorema di Reciprocità che è stato prima dimostrato a partire dalle equazioni di Maxwell. Ricordiamo che il teorema di Reciprocità nella forma generale assume due sistemi di sorgenti (1 e 2) come in figura.



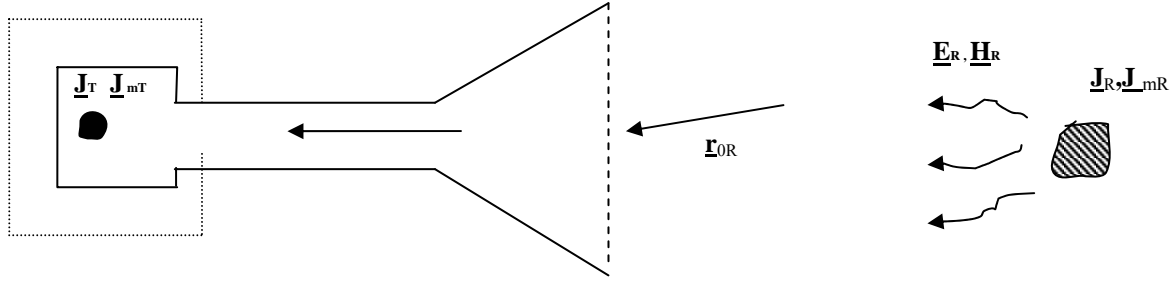
Se si considera una superficie S che racchiude solo un sistema di sorgenti (ad esempio le sorgenti 1) si ottiene l'integrale di Lorentz nella seguente forma:

$$\int_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{n}_0 dS = I_{12} \quad (6.3)$$

dove $\underline{E}_1, \underline{H}_1$ è il campo prodotto dalla sorgente \underline{J}_1 indipendentemente da \underline{J}_2 , e $\underline{E}_2, \underline{H}_2$ è il campo prodotto da \underline{J}_2 indipendentemente da \underline{J}_1 . Se invece la superficie S racchiude entrambe le sorgenti si ricava l'eguaglianza degli integrali di reazione:

$$I_{12} = \int_S (\underline{J}_1 \times \underline{E}_2 - \underline{J}_{m1} \times \underline{H}_2) dv = I_{21} = \int_S (\underline{J}_2 \times \underline{E}_1 - \underline{J}_{m2} \times \underline{H}_1) dv \quad (6.4)$$

Nel seguito si analizza come si comporta un'antenna in ricezione considerando la schematizzazione in figura sottop. Si assume che la sorgente 1 sia la distribuzione di corrente dell'antenna che si sta studiando quando opera come antenna trasmittente (sorgenti $\underline{J}_T, \underline{J}_{mT}$), mentre la sorgente 2 è quella posta a grande distanza che produce il campo che investe l'antenna sotto studio quando essa opera in ricezione (sorgenti $\underline{J}_R, \underline{J}_{mR}$).



Il campo che effettivamente sta sulla bocca dell'antenna (e con il quale si vuole calcolare W_R attraverso il Teorema di Poynting) prodotto dalle sorgenti \underline{J}_R , \underline{J}_{mR} è determinato anche dal fenomeno di scattering dovuto alla struttura dell'antenna e si può scrivere che:

$$\begin{aligned}\underline{E}_R &= \underline{E}_i + \underline{E}^S \\ \underline{H}_R &= \underline{H}_i + \underline{H}^S\end{aligned}\quad (6.5)$$

dove \underline{E}_R è il campo prodotto dalle sorgenti in presenza dell'antenna, \underline{E}_i è il campo incidente (in assenza dell'antenna) e \underline{E}^S è il campo di scattering; il campo magnetico \underline{H}_R si scrive in maniera analoga. Il contributo dei campi di scattering è dovuto alle sorgenti indotte su tutta la struttura metallica dell'antenna stessa che re-irradiano.

Per conoscere la potenza W_R si deve considerare il vero campo presente sulla bocca dell'antenna e non quello incidente, ovvero:

$$W_R = \frac{1}{2} \text{Re} \int_A (\underline{E}_R \times \underline{H}_R) \cdot \underline{z}_0 d^2 \underline{r}' \quad (6.6)$$

Anche nel caso dell'antenna in trasmissione si doveva risolvere un problema di diffrazione per ricavare la potenza irradiata W_T . Esso consisteva nel ricavare il campo sulla bocca generato dalle correnti \underline{J}_T , \underline{J}_{mT} che producono il campo in trasmissione \underline{E}_T , \underline{H}_T in presenza della struttura dell'antenna. Si vedrà che non è necessario risolvere questi due problemi separatamente perché legati dal Teorema di Reciprocità. Per prima cosa si dimostra che la potenza W_R ricevuta è legata a quella trasmessa W_T e all'integrale di reazione I_{TR} dalla seguente relazione:

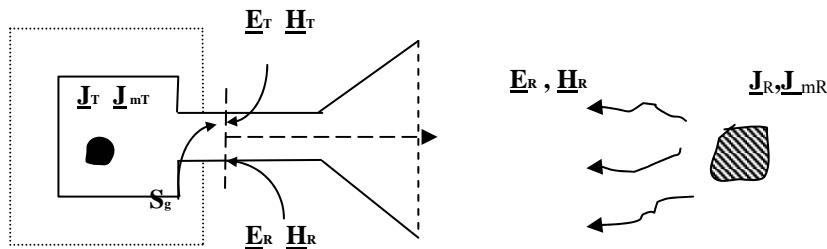
$$W_R = \frac{1}{16W_T} |I_{TR}|^2 \quad (6.7)$$

dove, essendo V il volume che racchiude le sorgenti \underline{J}_T , \underline{J}_{mT} , l'integrale di reazione vale:

$$I_{TR} = \int_V (\underline{J}_T \cdot \underline{E}_R - \underline{J}_{mT} \cdot \underline{H}_R) dv \quad (6.8)$$

Dimostrazione:

Si faccia riferimento ad un'antenna che sia collegata alla struttura del trasmettitore o del ricevitore attraverso una guida d'onda come in figura



Consideriamo una superficie S chiusa che contorna la sorgente dell'antenna in trasmissione $\mathbf{J}_T, \mathbf{J}_{mT}$. Tale superficie viene a coincidere con le pareti metalliche dell'antenna e attraversa la guida d'onda in una sezione intermedia come indicato in figura. Applicando il teorema di reciprocità:

$$\int_{S_g} (\underline{E}_T \times \underline{H}_R - \underline{E}_R \times \underline{H}_T) \cdot \underline{n}_0 dS_g = I_{TR} = \int_V (\underline{J}_T \cdot \underline{E}_R - \underline{J}_{mT} \cdot \underline{H}_R) dv \quad (6.9)$$

Nell'integrale di Lorentz la funzione integranda è nulla nei punti di S coincidenti con le pareti dell'antenna in quanto lì è nulla la componente tangenziale del campo elettrico e risulta:

$$(\underline{E}_T \times \underline{H}_R - \underline{E}_R \times \underline{H}_T) \cdot \underline{n}_0 = \underline{E}_T \times \underline{H}_R \cdot \underline{n}_0 - \underline{E}_R \times \underline{H}_T \cdot \underline{n}_0 = \underline{n}_0 \times \underline{E}_T \cdot \underline{H}_R - \underline{n}_0 \times \underline{E}_R \cdot \underline{H}_T = 0 \quad (6.10)$$

Essa risulta invece diversa da zero solo nel taglio nella sezione della guida sul quale si trovano i campi $\underline{E}_T, \underline{H}_T$ (generati dalle sorgenti interne) ed $\underline{E}_R, \underline{H}_R$ (generati dalla sorgente esterna). Se z è l'asse della guida sulla generica sezione la normale \underline{n}_0 coincide con \underline{z}_0 e per il calcolo dell'integrale è necessario considerare solo le componenti trasverse del campo elettrico e del campo magnetico, ovvero $\underline{E}_{Tt}, \underline{H}_{Tt}$ e $\underline{E}_{Rt}, \underline{H}_{Rt}$. Nella guida sono presenti un certo numero di modi di propagazione. Si ricordi che un modo in una guida d'onda è espresso da un termine che varia con z (asse della guida), e un termine che descrive l'andamento del campo nella sezione della guida stessa (funzione di x ed y). Il termine che varia con z è costituito da un'onda progressiva ed una regressiva come la corrente o la tensione in una linea di trasmissione. Per le componenti trasverse dei campi in trasmissione ed in ricezione avremo:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{E}_{Tt} &= (V_T^+ e^{-jKz} + V_T^- e^{+jKz}) \underline{g}(x, y) \\ \underline{H}_{Tt} &= \left(\frac{V_T^+}{\eta_g} e^{-jKz} - \frac{V_T^-}{\eta_g} e^{+jKz} \right) \underline{h}(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{E}_{Rt} &= (V_R^+ e^{+jKz} + V_R^- e^{-jKz}) \underline{g}(x, y) \\ \underline{H}_{Rt} &= \left(\frac{V_R^+}{\eta_g} e^{+jKz} - \frac{V_R^-}{\eta_g} e^{-jKz} \right) \underline{h}(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

V_T^+ è l'ampiezza del modo in trasmissione che si propaga nella direzione positiva dell'asse z (onda progressiva); V_T^- è invece l'ampiezza del modo in trasmissione che viaggia nella direzione contraria dovuto alla riflessione presente, non essendo garantita in genere la condizione di adattamento tra la guida d'onda e l'antenna. I vettori $\underline{g}(x, y)$ e $\underline{h}(x, y)$ esprimono la configurazione del modo nel piano della sezione della guida d'onda. L'impedenza caratteristica del modo in guida η_g è pari al rapporto tra le ampiezze dei campi elettrici e magnetici delle onde sia progressive che regressive. Per il campo in ricezione esso si propaga verso il ricevitore ovvero nel senso opposto alla z ed anche in questo caso potrà essere presente un'onda riflessa nella direzione delle z positive dovuta a disadattamento tra la guida d'onda ed il ricevitore. Passando al campo magnetico \underline{H}_{Rt} si deve dividere per η_g stando attenti al fatto che nella direzione opposta di z si deve cambiare il segno. Assumendo che si propagano solo modi TE (ed in particolare solo il modo fondamentale) i vettori $\underline{g}(x, y)$ e $\underline{h}(x, y)$ (funzioni modali) discendono da una funzione potenziale $T(x, y)$:

$$\underline{g} = \nabla T \times \underline{z}_0, \quad \underline{h} = \nabla T \quad (6.12)$$

$$\int_{S_g} (\underline{g} \times \underline{h}) \cdot \underline{z}_0 dS_g = \int_{S_g} [(\nabla T \times \underline{z}_0) \times \nabla T] \cdot \underline{z}_0 dS_g = \int_{S_g} |\nabla T|^2 dS_g = \Phi$$

Le funzioni vettoriali $\underline{g}(x, y)$ e $\underline{h}(x, y)$ dipendono solo dal modo in guida. Nel caso di modi TM si possono fare considerazioni del tutto identiche per cui non perdiamo in generalità.

Introduciamo i coefficienti di riflessione q_{V_T} e q_{V_R} per le onde nei due sensi presenti nella guida. In trasmissione l'onda diretta è quella secondo le z positive, pertanto il coefficiente di riflessione in trasmissione è:

$$q_{V_T} = \frac{V_T^- e^{+jKz}}{V_T^+ e^{-jKz}} \quad (6.13)$$

In ricezione l'onda diretta è quella secondo le z negative e quindi il coefficiente di riflessione è dato da:

$$q_{V_R} = \frac{V_R^- e^{+jK_z z}}{V_R^+ e^{-jK_z z}} \quad (6.14)$$

è quindi possibile scrivere per i campi alla sezione della guida considerata:

$$\begin{cases} \underline{E}_{T_t} = V_T^+ e^{-jK_z z} (1 + q_{V_T}) \underline{g}(x, y) \\ \underline{H}_{T_t} = \frac{V_T^+}{\eta_g} e^{-jK_z z} (1 - q_{V_T}) \underline{h}(x, y) \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\begin{cases} \underline{E}_{R_t} = V_R^+ e^{+jK_z z} (1 + q_{V_R}) \underline{g}(x, y) \\ \underline{H}_{R_t} = -\frac{V_R^+}{\eta_g} e^{+jK_z z} (1 - q_{V_R}) \underline{h}(x, y) \end{cases} \quad (6.16)$$

L'integrale di Lorentz si calcola dalle espressioni dei campi dei modi in guida:

$$I_{TR} = \int_{S_g} (\underline{E}_T \times \underline{H}_R - \underline{E}_R \times \underline{H}_T) \cdot \underline{n}_0 dS_g =$$

$$= \int_{S_g} \left[-\frac{V_T^+ V_R^+}{\eta_g} (1 + q_{V_T})(1 - q_{V_R}) - \frac{V_T^+ V_R^+}{\eta_g} (1 + q_{V_R})(1 - q_{V_T}) \right] \underline{g}(x, y) \times \underline{h}(x, y) \cdot \underline{z}_0 dS_g \quad (6.17)$$

$$I_{TR} = \left[-\frac{V_T^+ V_R^+}{\eta_g} (1 + q_{V_T})(1 - q_{V_R}) - \frac{V_T^+ V_R^+}{\eta_g} (1 + q_{V_R})(1 - q_{V_T}) \right] \int_{S_g} \underline{g}(x, y) \times \underline{h}(x, y) \cdot \underline{z}_0 dS_g =$$

$$= -\frac{2V_T^+ V_R^+}{\eta_g} (1 - q_{V_T} q_{V_R}) \Phi \Rightarrow |I_{TR}|^2 = \frac{4(V_T^+)^2 (V_R^+)^2}{\eta_g^2} |1 - q_{V_T} q_{V_R}|^2 \Phi \quad (6.18)$$

Il valore di W_R si può calcolare nella sezione della guida d'onda come parte reale del flusso del vettore di Poynting adottando le espressioni modali per i campi e ammettendo non siano presenti delle perdite nella guida stessa (il flusso di potenza in guida è pari a quello attraverso la bocca dell'antenna). La stessa considerazione vale per la potenza trasmessa W_T . Nel calcolo di W_R la normale alla sezione vale $-\underline{z}_0$ in quanto si tratta di potenza che fluisce nella direzione delle z negative (flusso entrante in S). A W_T verrà associato il segno “+” poiché fluisce nella direzione delle z positive. Si ottiene:

$$W_R = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{S_g} (\underline{E}_R \times \underline{H}_R^*) \cdot \underline{z}_0 dS_g \right] = +\frac{1}{2} \frac{(V_R^+)^2}{\eta_g} \operatorname{Re}[(1 + q_{V_R})(1 - q_{V_R}^*)] \int_{S_g} (\underline{g} \times \underline{h}) \cdot \underline{z}_0 dS_g =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(V_R^+)^2}{\eta_g} (1 - |q_{V_R}|^2) \Phi \quad (6.18)$$

$$W_T = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{S_g} (\underline{E}_T \times \underline{H}_T^*) \cdot \underline{z}_0 dS_g \right] = \frac{1}{2} \frac{(V_T^+)^2}{\eta_g} (1 - |q_{V_T}|^2) \Phi \quad (6.19)$$

è pertanto possibile esprimere $(V_T^+)^2$ e $(V_R^+)^2$ in termini delle relative potenze:

$$(V_T^+)^2 = 2W_T \eta_g \frac{1}{1 - |q_{V_T}|^2} \frac{1}{\Phi} \quad ; \quad (V_R^+)^2 = 2W_R \eta_g \frac{1}{1 - |q_{V_R}|^2} \frac{1}{\Phi} \quad (6.20)$$

sostituendo nella espressione di I_{TR} (6.18) si può scrivere:

$$|I_{TR}|^2 = \frac{4}{\eta_g^2} 4\eta_g^2 W_T W_R \frac{|1 - q_{VT} q_{VR}|^2}{(1 - |q_{VT}|^2)(1 - |q_{VR}|^2)} \quad (6.21)$$

la funzione f fornita dal termine:

$$f(q_{VT}, q_{VR}) = \frac{|1 - q_{VT} q_{VR}|^2}{(1 - |q_{VT}|^2)(1 - |q_{VR}|^2)} \quad (6.22)$$

dependente dai coefficienti di riflessione q_{VT} e q_{VR} ed esprime in forma molto generale l'effetto del disadattamento d'impedenza sia al terminale tra la guida e il generatore/ricevitore che al terminale tra guida ed antenna. Nel caso che una delle due terminazioni sia adattata si ricava il termine $(1 - |q|^2) = (1 - |I|^2)$ già ricavato quando è stata introdotta l'efficienza di adattamento. Nel caso di *adattamento perfetto*, entrambi i coefficienti di riflessione sono nulli e pertanto risulta $f(q_{VT} = 0, q_{VR} = 0) = 1$. In questo caso particolare si ottiene dalla (6.21):

$$|I_{TR}|^2 = 16W_T W_R \quad (6.23)$$

da cui, come si voleva dimostrare:

$$W_R = \frac{1}{16W_T} |I_{TR}|^2 \quad (6.24)$$

Per il calcolo dell'integrale di reazione I_{TR} fornito dalla (6.4) facciamo riferimento alla soluzione del problema di diffrazione in trasmissione già risolto, se pure in maniera approssimata, nel caso di antenne ad apertura. E' opportuno allora considerare una superficie S che passi attraverso il piano di bocca e racchiuda le sorgenti in trasmissione attraverso la sfera all'infinito (nella dimostrazione precedente era stata considerata una superficie che attraversava la guida per sfruttare le relazioni note dei modi). Su tale superficie si applichi il teorema di equivalenza considerando le correnti elettriche $\underline{K}_T = \underline{z}_0 \times \underline{H}_T$ e le correnti magnetiche $\underline{K}_{mT} = -\underline{z}_0 \times \underline{E}_T$, dove \underline{E}_T e \underline{H}_T sono ora i campi presenti sulla bocca con l'antenna operante in trasmissione. La struttura di antenna può essere tolta considerando internamente ad S lo stesso mezzo presente fuori. Le correnti equivalenti alla struttura metallica e alle sorgenti interne vengono ad irradiare nello spazio libero, come anche le correnti esterne. Pertanto, mentre $\underline{K}_T = \underline{z}_0 \times \underline{H}_T$ e $\underline{K}_{mT} = -\underline{z}_0 \times \underline{E}_T$ non sono note (problema di diffrazione in trasmissione), il campo irradiato dalle correnti esterne \underline{E}_R e \underline{H}_R ora viene a coincidere con quello presente nello spazio libero, ovvero il campo incidente (in assenza della struttura dell'antenna). In questo modo non è più necessario risolvere il problema di diffrazione in ricezione una volta sia stato risolto quello in trasmissione. Si dimostra che l'integrale di reazione è dato dalla seguente integrazione sulla bocca dell'antenna:

$$|I_{TR}|^2 = \frac{4}{\eta^2} \left| \int_A \underline{E}_T \cdot \underline{E}_i dA \right|^2 \quad (6.25)$$

Tale espressione mostra l'effetto di filtro di polarizzazione operato dall'antenna, la quale riceve solo la componente del campo incidente che risulta nella stessa direzione di quella del campo di illuminazione della bocca quando opera in trasmissione.

Dimostrazione

Nel caso di antenna ad apertura applichiamo il teorema di equivalenza considerando la superficie chiusa S delimitata dal piano di bocca e dalla semisfera all'infinito. Siccome le correnti equivalenti determinano il medesimo campo nel volume esterno ad S anche l'integrale di reazione di tali sorgenti equivalenti coincide con quello delle sorgenti originarie. L'integrale di volume al secondo membro della (6.9) si riduce ad un integrale di superficie. Inoltre, coerentemente con la teoria dell'apertura, si assuma di poter limitare l'integrale alla regione dell'apertura A , supponendo il campo in trasmissione \underline{E}_T , \underline{H}_T nullo al di fuori di essa:

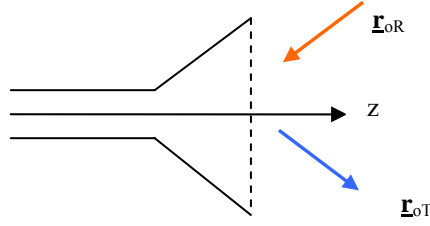
$$I_{TR} = \int_S (\underline{J}_T \times \underline{E}_i - \underline{J}_{mT} \times \underline{H}_i) dv \quad \Rightarrow \quad I_{TR} = \int_A [(\underline{z}_0 \times \underline{H}_T) \cdot \underline{E}_i + (\underline{z}_0 \times \underline{E}_T) \cdot \underline{H}_i] dA \quad (6.26)$$

Utilizzando ancora il metodo dell'apertura, supponiamo che il campo sulla bocca sia un'onda piana. Essa si propaga in direzione \underline{r}_{0T} , generalmente diversa da \underline{z}_0 nel caso di scansione elettronica del fascio. Ciò vuol dire che il campo di bocca in trasmissione $\underline{E}_T, \underline{H}_T$ è tale che

$$\underline{E}_T = -\eta(\underline{r}_{0T} \times \underline{H}_T) \quad (6.27)$$

Inoltre il campo incidente proviene da una sorgente molto lontana e si può ritenere che sia anche esso un'onda piana viaggiando in direzione \underline{r}_{0R} come indicato in figura:

$$\underline{H}_i = +\frac{1}{\eta}(\underline{r}_{0R} \times \underline{E}_i) \quad (6.28)$$



Con queste ipotesi, l'integrale di reazione diventa:

$$I_{TR} = \int_A [(\underline{z}_0 \times \underline{H}_T) \cdot \underline{E}_i + (\underline{z}_0 \times \underline{E}_T) \cdot \underline{H}_i] dA = \frac{1}{\eta} \int_A [\underline{z}_0 \times (\underline{r}_{0T} \times \underline{E}_T) \cdot \underline{E}_i + (\underline{z}_0 \times \underline{E}_T) \cdot (\underline{r}_{0R} \times \underline{E}_i)] dA \quad (6.29)$$

sussistendo le seguenti identità vettoriali:

$$(\underline{z}_0 \times \underline{r}_{0T} \times \underline{E}_T) \cdot \underline{E}_i = [\underline{r}_{0T}(\underline{z}_0 \cdot \underline{E}_T) - \underline{E}_T(\underline{z}_0 \cdot \underline{r}_{0T})] \cdot \underline{E}_i = (\underline{r}_{0T} \cdot \underline{E}_i)(\underline{z}_0 \cdot \underline{E}_T) - (\underline{E}_T \cdot \underline{E}_i)(\underline{z}_0 \cdot \underline{r}_{0T}) \quad (6.30)$$

$$(\underline{z}_0 \times \underline{E}_T) \cdot (\underline{r}_{0R} \times \underline{E}_i) = \underline{z}_0 \cdot (\underline{E}_T \times \underline{r}_{0R} \times \underline{E}_i) = (\underline{z}_0 \cdot \underline{r}_{0R})(\underline{E}_T \cdot \underline{E}_i) - (\underline{z}_0 \cdot \underline{E}_i)(\underline{r}_{0R} \cdot \underline{E}_T) \quad (6.31)$$

si scrive quindi:

$$I_{TR} = +\frac{1}{\eta} \int_A [(\underline{r}_{0T} \cdot \underline{E}_i)(\underline{z}_0 \cdot \underline{E}_T) - (\underline{E}_T \cdot \underline{E}_i)(\underline{z}_0 \cdot \underline{r}_{0T}) + (\underline{z}_0 \cdot \underline{r}_{0R})(\underline{E}_T \cdot \underline{E}_i) - (\underline{z}_0 \cdot \underline{E}_i)(\underline{r}_{0R} \cdot \underline{E}_T)] dA \quad (6.32)$$

Nel caso in cui l'antenna sia abbastanza direttiva ed il campo incidente provenga da una direzione non molto diversa da quella di massima trasmissione, ed in particolare nel caso parassiale, si può scrivere:

$$\underline{r}_{0R} \cdot \underline{E}_T \cong 0 \quad ; \quad \underline{r}_{0T} \cdot \underline{E}_i \cong 0 \quad ; \quad \underline{r}_{0R} \cdot \underline{z}_0 \cong -1 \quad ; \quad \underline{r}_{0T} \cdot \underline{z}_0 \cong +1 \quad (6.32)$$

$$(\underline{z}_0 \times \underline{r}_{0T} \times \underline{E}_T) \cdot \underline{E}_i \approx -(\underline{E}_T \cdot \underline{E}_i)(\underline{z}_0 \cdot \underline{r}_{0T}) \approx \underline{E}_T \cdot \underline{E}_i \quad ; \quad (\underline{z}_0 \times \underline{E}_i) \cdot (\underline{r}_{0R} \times \underline{E}_T) \approx -(\underline{z}_0 \cdot \underline{r}_{0R})(\underline{E}_T \cdot \underline{E}_i) \approx -\underline{E}_T \cdot \underline{E}_i$$

e pertanto si ricava:

$$I_{TR} = -\frac{2}{\eta} \int_A \underline{E}_T \cdot \underline{E}_i dA \quad (6.34)$$

ed infine, come volevasi dimostrare:

$$|I_{TR}|^2 = \frac{4}{\eta^2} \left| \int_A \underline{E}_T \cdot \underline{E}_i dA \right|^2 \quad (6.35)$$

Introduciamo ora, come fatto nella teoria dell'apertura, la funzione di illuminazione $f_T(\underline{r}_t)$ che coincide con le componenti trasverse del campo \underline{E}_T in trasmissione sull'apertura A ed è nulla fuori di essa, ovvero $f_T(\underline{r}_t) = \underline{E}_T(\underline{r}_t)$. Per il campo incidente esplicitiamo il termine esponenziale che contiene la direzione di provenienza dell'onda piana incidente sull'antenna:

$$E_i(r) = f_i(r) e^{+jk_i \cdot r} \quad (6.36)$$

dove $f_i(\underline{r}_t)$ è l'ampiezza del campo stesso e $\underline{k}_i = k_0 \underline{r}_{0R} = k_0 \sin\theta \cos\varphi \underline{x}_0 + k_0 \sin\theta \sin\varphi \underline{y}_0$ è il vettore di propagazione dell'onda incidente nella direzione θ, φ . Nell'esponenziale è presente il segno “+” poiché è stato scelto \underline{z}_0 nella direzione che si allontana dall'antenna. Ricordando la formula di W_R espressa dalla (6.24) e la relazione (6.35):

$$W_R = \frac{1}{16W_T} |I_{TR}|^2 \quad |I_{TR}|^2 = \frac{4}{\eta^2} \left| \int_A \underline{E}_T \cdot \underline{E}_i dA \right|^2$$

Introduciamo la funzione di illuminazione e l'espressione (6.36) per il campo incidente. L'integrale nella (6.35) è effettuato sul piano di bocca x, y i cui punti sono identificati dal vettore \underline{r}_t trasverso rispetto all'asse z . La (6.35) diventa:

$$|I_{TR}|^2 = \frac{4}{\eta^2} \left| \int_A f_T(\underline{r}_t) f_i(\underline{r}_t) e^{+jk_i \cdot \underline{r}_t} d^2 \underline{r}_t \right|^2 = \frac{4}{\eta^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(\underline{r}_t) f_i(\underline{r}_t) e^{+jk_i \cdot \underline{r}_t} d^2 \underline{r}_t \right|^2 \quad (6.37)$$

La potenza irradiata W_T si esprime come flusso del vettore di Poynting uscente attraverso l'apertura stessa per cui, introducendo la funzione di illuminazione:

$$\begin{aligned} W_T &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_A (\underline{E}_T \times \underline{H}_T^*) \cdot \underline{z}_0 d^2 \underline{r}_t \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_A \underline{z}_0 \times \underline{E}_T \cdot \underline{H}_T^* d^2 \underline{r}_t \right] = \\ &= -\frac{1}{2\eta} \operatorname{Re} \left[\int_A (\underline{z}_0 \times \underline{E}_T) \cdot (\underline{r}_{0T} \times \underline{E}_T^*) d^2 \underline{r}_t \right] \equiv \frac{1}{2\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_T(\underline{r}_t)|^2 d^2 \underline{r}_t \end{aligned} \quad (6.38)$$

e quindi si ha:

$$W_R = \frac{1}{16W_T} |I_{TR}|^2 = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(\underline{r}_t) f_i(\underline{r}_t) e^{+jk_i \cdot \underline{r}_t} d^2 \underline{r}_t \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f_T(\underline{r}_t)|^2 d^2 \underline{r}_t} \quad (6.39)$$

Se $f_i(\underline{r}_t)$ è costante all'interno della bocca d'antenna, può essere portato fuori del segno di integrale ed il termine fuori integrale $\frac{1}{2\eta} |f_i|^2$ rappresenta l'intensità P_i del vettore di Poynting del campo incidente piano e uniforme. Pertanto, in base alla definizione, l'espressione sotto l'integrale esprimerebbe l'area equivalente:

$$W_R = \frac{1}{2\eta} |f_i|^2 \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(\underline{r}_t) e^{+jk_i \cdot \underline{r}_t} d^2 \underline{r}_t \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f_T(\underline{r}_t)|^2 d^2 \underline{r}_t} = P_i A_{eq}(\theta, \varphi) = P_i \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(\underline{r}_t) e^{+jk_i \cdot \underline{r}_t} d^2 \underline{r}_t \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f_T(\underline{r}_t)|^2 d^2 \underline{r}_t} \quad (6.40)$$

Per confronto con l'espressione della direttività in termini di funzioni di illuminazione ricavata nel caso parassiale si ottiene la relazione fondamentale che si voleva dimostrare:

$$A_{eq}(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \varphi)$$

Seppure ricavata qui per antenne ad apertura nel caso parassiale, questa relazione è del tutto universale.

6.2 ANTENNA IN ZONA DI FRESNEL

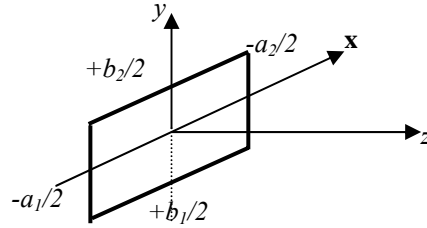
Consideriamo una apertura rettangolare e calcoliamo il campo in zona di Fresnel parassiale (campo radiativo). In zona di Fresnel si considera l'approssimazione al secondo ordine del termine di fase della funzione di Green, mentre per il suo modulo si considera la stessa espressione utilizzata in zona di Fraunhofer. Lo stesso dicasi per l'approssimazione riguardante il gradiente della funzione di Green che si assume ancora nella direzione \underline{r}_0 . In zona di Fresnel parassiale si considera inoltre la direzione di osservazione praticamente ortogonale al vettore di sorgente giacente sul piano x,y ($\underline{r}_0 \cdot \underline{r}' = 0$). Il termine di fase nella funzione di Green si scrive pertanto:

$$-\frac{jk_o}{2r} \left[r'^2 - (\underline{r}_0 \cdot \underline{r}')^2 \right]$$

Si estende immediatamente il risultato per cui la funzione di radiazione F (che ci da il campo irradiato) è fornita a partire dalla funzione di illuminazione $f(x,y)$ dalla presente relazione scritta nel caso scalare, in cui tale termine di fase si aggiunge a quello lineare in \underline{r}' .

$$F(\theta, \varphi, r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') e^{jk_o \left[\sin \theta (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) - \frac{x'^2 + y'^2}{2r} \right]} dx' dy' \quad (6.41)$$

Si noti come F non risulta più indipendente dalla distanza r del punto di osservazione, la direttività risulta anche dipendere da r e l'intensità del vettore di Poynting non varia più con la distanza secondo la semplice legge $1/r^2$.



Nel caso di illuminazione fattorizzabile $f(x,y) = f^{(x)}(x)f^{(y)}(y)$ si possono fare le stesse considerazioni già fatte in zona di Fraunhofer e si ottiene il prodotto di due integrali di singola variabile $F(r, \theta, \varphi) = F^{(x)}(r, \theta, \varphi) F^{(y)}(r, \theta, \varphi)$. Infine, nel caso di illuminazione uniforme, ove $f(x', y')$ costante nell'apertura e pari a E_0 e nulla al di fuori di essa, si ottiene il prodotto di due integrali di struttura identica dati dalle seguenti due relazioni in cui viene assunta un'apertura limitata da $-a_1/2 \leq x \leq a_2/2$ e $-b_1/2 \leq y \leq b_2/2$:

$$F^{(x)}(\theta, \varphi, r) F^{(y)}(\theta, \varphi, r) = E_0 \int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{jk_o \sin \theta \cos \varphi x' - jk_o \frac{x'^2}{2r}} dx' \int_{-b_1/2}^{b_2/2} e^{jk_o \sin \theta \sin \varphi y' - jk_o \frac{y'^2}{2r}} dy' \quad (6.42)$$

Il calcolo dell'integrale è di una certa complessità e conduce alla introduzione dei cosiddetti integrali di Fresnel, ovvero le due funzioni seno-integrale $S(u)$ e coseno-integrale $C(u)$ date dalle espressioni:

$$\int_0^u e^{-j\frac{\pi}{2}u^2} du = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du - j \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du = C(u) - jS(u) \quad (6.43)$$

Si dimostra per la funzione di radiazione la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{jk_o \sin \theta \cos \varphi x' - jk_o \frac{x'^2}{2r}} dx' &= e^{j\psi_x} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \{ [C(u_2) - C(u_1)] - j[S(u_2) - S(u_1)] \} \\ \int_{-b_1/2}^{b_2/2} e^{jk_o \sin \theta \sin \varphi y' - jk_o \frac{y'^2}{2r}} dy' &= e^{j\psi_y} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \{ [C(v_2) - C(v_1)] - j[S(v_2) - S(v_1)] \} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Ove le grandezze u_1, u_2, v_1, v_2 sono legate alla distanza del punto di osservazione, alla direzione di osservazione e alle dimensioni della antenna nelle due direzioni, mentre le fasi ψ sono irrilevanti quando si calcola la direttività:

$$\begin{cases} v_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{b_1}{2} + r \sin \theta \sin \varphi \right) \\ v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{b_2}{2} - r \sin \theta \sin \varphi \right) \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{a_1}{2} + r \sin \theta \cos \varphi \right) \\ u_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{a_2}{2} - r \sin \theta \cos \varphi \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_x = \frac{k_o}{2} r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \\ \psi_y = \frac{k_o}{2} r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \end{cases} \quad (6.45)$$

Dimostrazione:

Limitiamoci a ricavare $F^{(x)}$ essendo l'altro fattore identico nella forma. Il termine di fase nella () si trasforma in un quadrato di un binomio aggiungendo e sottraendo una opportuna quantità:

$$\begin{aligned} jk_o \left[\sin \theta \cos \varphi x' - \frac{x'^2}{2r} \right] &= -\frac{jk_o}{2r} \left[x'^2 - 2r \sin \theta \cos \varphi x' \right] = \\ &= -\frac{jk_o}{2r} \left[x'^2 - 2r \sin \theta \cos \varphi x' + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right] = \frac{jk_o}{2r} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{jk_o}{2r} (x' - r \sin \theta \cos \varphi)^2 \end{aligned} \quad (6.46)$$

Per i due termini nella fase si noti che solo il secondo dipende dalla variabile di integrazione x' mentre il primo è una costante. Poniamo pertanto:

$$\psi_x = \frac{k_o}{2} r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi ; \quad \frac{\pi}{2} u^2 = \frac{k_o}{2r} (x' - r \sin \theta \cos \varphi)^2 ; \quad jk_o \left[\sin \theta \cos \varphi x' - \frac{x'^2}{2r} \right] = j\psi_x - j\frac{\pi}{2} u^2 \quad (6.47)$$

La seconda costituisce una trasformazione di variabile dalla variabile x' alla variabile u . Introducendo nelle precedenti si ottiene:

$$\int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{jk_o \sin \theta \cos \varphi x' - jk_o \frac{x'^2}{2r}} dx' = e^{j\psi_x} \int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{-j\frac{\pi}{2} u^2} du \quad (6.48)$$

Operiamo la trasformazione di variabile da x' alla variabile u , ciò che richiede di calcolare la relazione tra i differenziali ed i nuovi estremi di integrazione:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{k_o}{r\pi}} (x' - r \sin \theta \cos \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} (x' - r \sin \theta \cos \varphi) \quad \text{da cui:} \quad du = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} dx' \\ u_1 &= -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{a_1}{2} + r \sin \theta \cos \varphi \right) ; \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{a_2}{2} - r \sin \theta \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (6.49)$$

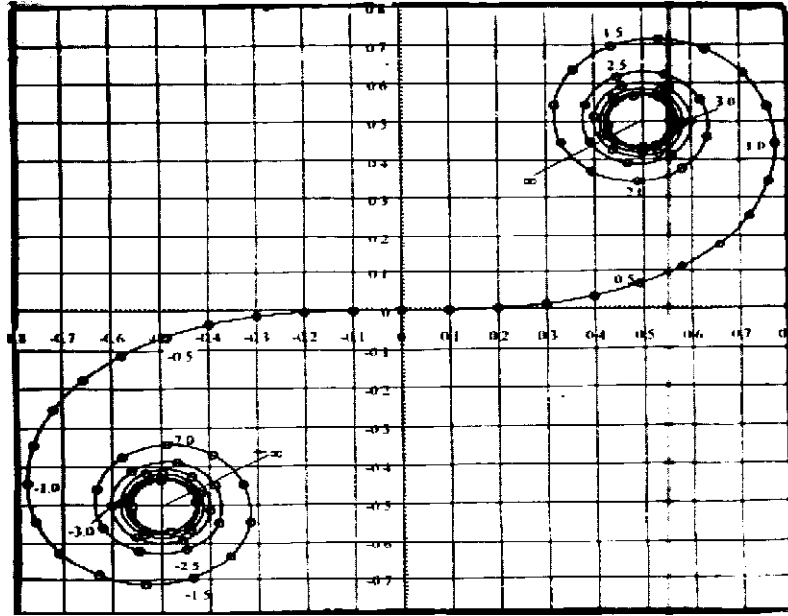
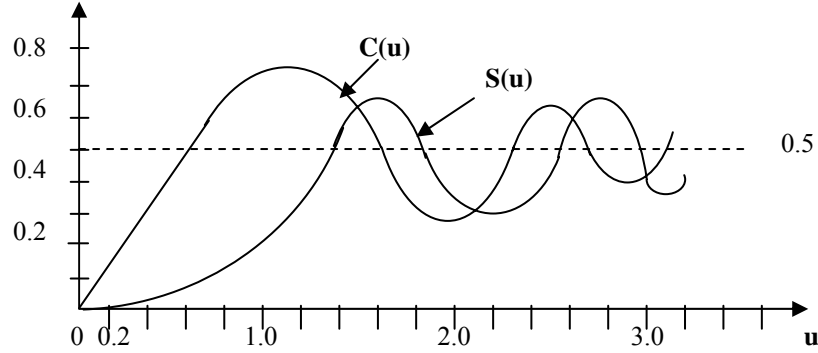
Si arriva alla seguente espressione, come si voleva dimostrare:

$$\begin{aligned} \int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{jk_o \sin \theta \cos \varphi x' - jk_o \frac{x'^2}{2r}} dx' &= e^{j\psi_x} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-j\frac{\pi}{2} u^2} du = e^{j\psi_x} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \left[\int_0^{u_2} e^{-j\frac{\pi}{2} u^2} du - \int_0^{u_1} e^{-j\frac{\pi}{2} u^2} du \right] = \\ &= e^{j\psi_x} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \{ C(u_2) - C(u_1) - j[S(u_2) - jS(u_1)] \} \end{aligned}$$

Le funzioni $C(u)$ e $S(u)$ hanno l'andamento in figura per $u > 0$. Sono entrambe funzioni antisimmetriche per le quali risulta $C(-u) = -C(u)$ e $S(-u) = -S(u)$. Per $u \rightarrow 0$ valgono $C(u) = 0$, $S(u) = 0$ mentre per $u \rightarrow \infty$ valgono $C(u) = 0.5$, $S(u) = 0.5$. Se rappresentiamo in un piano i valori di $C(u)$ sulle ascisse e di $S(u)$ sulle ordinate per valori crescenti di u , si ottiene la figura geometrica qui rappresentata in figura (spirale di Carnu). Per $u=0$ siamo nell'origine, per $u \rightarrow \infty$ nel punto 0.5, 0.5 e per $u \rightarrow -\infty$ nel punto simmetrico -0.5, -0.5. Il valore massimo per $S(u)$ vale $S_{max} = 0.72$ e si ottiene per

$u = 1.4$; per $C(u)$ il valore massimo $C_{max}=0.75$ si ottiene per $u=1$. Sulla mappa di Cornu, i punti con massima distanza dall'origine si hanno per $u = 1.25$ e l'elongazione massima vale:

$$\max \left[\sqrt{C^2(u) + S^2(u)} \right] \cong 0.92 \quad (6.50)$$



A partire dalla espressione per la funzione di radiazione in zona di Fresnel, consideriamo per semplicità il caso di illuminazione polarizzata linearmente lungo l'asse y per cui si ha $f_x=0, f_y \neq 0$ e quindi $F_x=0$ e $F_y \neq 0$ e si ottiene il caso scalare. Andiamo a calcolare il campo sull'asse z , ovvero per $\theta=0$:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\eta} \frac{1}{r^2 \lambda^2} |F_y|^2 = \frac{1}{2\eta} \frac{1}{r^2 \lambda^2} \left| F_y^{(x)} \right|^2 \left| F_y^{(y)} \right|^2 = \\ &= \frac{|E_0|^2}{2\eta} \frac{1}{r^2 \lambda^2} \frac{\lambda r}{2} \left\{ [C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \right\} \frac{\lambda r}{2} \left\{ [C(v_2) - C(v_1)]^2 + [S(v_2) - S(v_1)]^2 \right\} = \\ &= \frac{P_t}{4} \left\{ [C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \right\} \left\{ [C(v_2) - C(v_1)]^2 + [S(v_2) - S(v_1)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.51)$$

dove $P_t = |E_0|^2 / 2\eta$ è la densità di potenza sulla bocca e gli estremi di integrazione valgono:

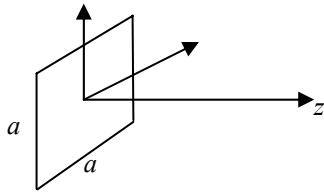
$$\begin{cases} v_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{b_1}{2} \\ v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{b_2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{a_1}{2} \\ u_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{a_2}{2} \end{cases} \quad (6.52)$$

Si osserva poi come le grandezze tra parentesi graffe hanno un valore che si può interpretare graficamente sulla mappa di Cornu in quanto rappresenta il quadrato della lunghezza di un segmento che congiunge il punto corrente per $u=u_1$ e quello per $u=u_2$ (e analogamente per il secondo termine tra parentesi graffe). Come ovvio per $r \rightarrow \infty$ si ottiene $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0$, le lunghezze dei segmenti tra parentesi graffe vanno a zero e quindi $P(r, \theta, \phi) = 0$. Per $r \rightarrow 0$ si ottiene la lunghezza del segmento che congiunge i punti estremi della spirale $-0.5, -0.5$ e $0.5, 0.5$ e quindi $P(r, \theta, \phi) = 1/4 P_t [\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}]^2 = P_t$ ovvero si ottiene come ovvio la densità di potenza sulla apertura. Al variare delle dimensioni dell'apertura o al variare di r i due punti si muovono sulla spirale e la lunghezza del segmento di conseguenza può aumentare o diminuire.

Nel caso particolare di apertura simmetrica rispetto all'asse z risulta $a_1 = a_2 = a$ e $b_1 = b_2 = b$. Di conseguenza $u_1 = -u_2 = u$ e $v_1 = -v_2 = v$ e per le proprietà antisimmetriche degli integrali di Fresnel:

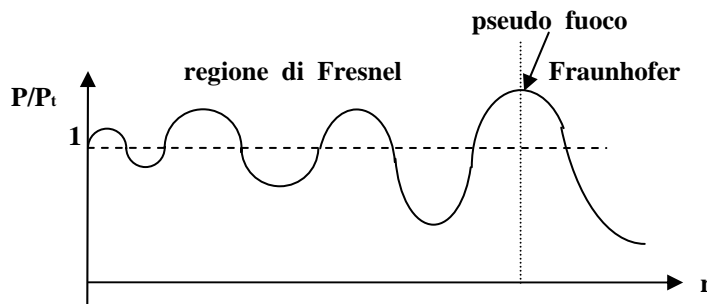
$$P = \frac{P_t}{4} \{ [2C(u)]^2 + [2S(u)]^2 \} \{ [2C(v)]^2 + [2S(v)]^2 \} = 4P_t \{ [C(u)]^2 + [S(u)]^2 \} \{ [C(v)]^2 + [S(v)]^2 \} \quad (6.53)$$

Ora i segmenti da considerare sulla spirale di Cornu hanno un estremo nell'origine e l'altro corrente dall'origine stessa per $r \rightarrow \infty$ ($u=v=0$) fino al punto $0.5, 0.5$. Si capisce pertanto come al diminuire di r dapprima c'è un incremento della densità di potenza come ci si aspetta. Quando ci troviamo in zona di Fraunhofer questo incremento segue la legge $1/r^2$. Avvicinandosi ulteriormente all'antenna si ottiene invece un andamento oscillante che è tipico della zona di Fresnel. Nel caso particolare di apertura quadrata di dimensione a risulta $a_1 = -a_2 = b_1 = -b_2 = a$. Di conseguenza $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = w$ e la relazione precedente diventa:



$$P = 4P_t [C^2(w) + S^2(w)]^2 \quad ; \quad w = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{a}{2} \quad (6.54)$$

Considerando il segmento con una estremità nell'origine e l'altra corrente al variare di w si ottiene per P al variare di r il seguente andamento in cui la crescita al diminuire della distanza in zona di Fraunhofer è limitata fino ad un valore di w che corrisponde alla massima elongazione di tale segmento che si ottiene per $w=1.2$. Questo massimo valore corrisponde al limite tra zona di Fraunhofer e zona di Fresnel e determina un massimo relativo che si chiama *pseudo fuoco*. Il valore della densità di potenza nello pseudo fuoco è circa 4.5 dB sopra la potenza che transita nell'apertura:



$$w = 1.2 \rightarrow r = 0.34 \frac{a^2}{\lambda} \Rightarrow \frac{P}{P_t} = 4(0.92)^2 = 2.85 (\approx 4.5 \text{ dB}) \quad (6.55)$$

6.3 Tromba con lente

Per realizzare antenne a tromba con grandi aperture senza aumentare troppo la lunghezza, come richiesto dalle condizioni di ottimo precedentemente ricavate, può essere corretto l'errore di fase quadratico con una lente dielettrica di indice di rifrazione n .

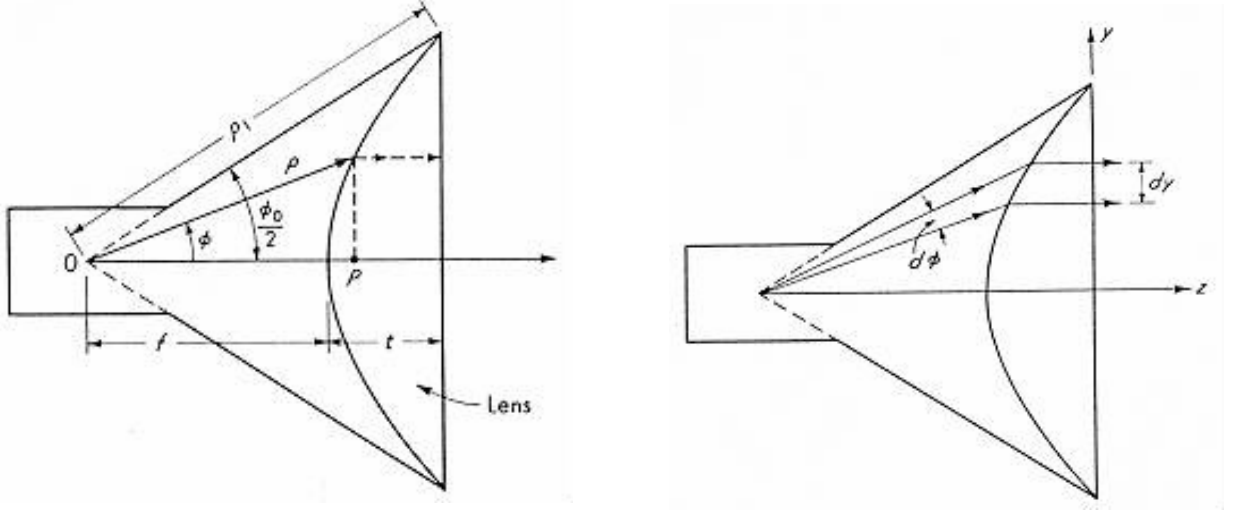


Figura 2.23: Geometria della tromba divergente sul piano H e delle traiettorie dei raggi in presenza della lente dielettrica (a sinistra) e illustrazione dell'effetto della lente sulla rastremazione del campo sull'apertura con il metodo del tubo di flusso (a destra).

La lente viene introdotta per determinare una fase costante sul piano di bocca dell'antenna. Evidentemente i raggi emergenti da tale superficie iconale piana nei due mezzi omogenei, fuori la lente e dentro la lente, sono dei segmenti rettilinei ortogonali alla iconale e quindi tra loro paralleli. La forma della lente definita in maniera parametrica dalla funzione $\rho(\phi)$ (si veda la figura 2.23) si ricava applicando la legge dell'uguale percorso ottico. Se n è l'indice di rifrazione del dielettrico ed f è la lunghezza focale definita nella figura, si scrive:

$$\rho = f + n(\overline{OP} - f) = (1 - n)f + n\rho \cos \phi \quad (6.56)$$

Da cui si ricava facilmente il profilo della lente, che è l'equazione di una iperbole in coordinate polari:

$$\rho(\phi) = \frac{(n-1)f}{n \cos \phi - 1} \quad (6.57)$$

Per ricavare ora il campo di illuminazione sull'apertura applichiamo il metodo dei tubi di flusso con riferimento sempre alla figura (2.23). La condizione di flusso di potenza costante attraverso due sezioni del tubo di flusso, una di larghezza $\rho d\phi$ (ρ è una generica distanza dal punto focale sui raggi da esso emergenti) e l'altra di larghezza dy si scrive:

$$P(y) = P(\phi) \rho \frac{d\phi}{dy} \quad (6.58)$$

Ricordando l'espressione del campo all'interno della struttura divergente nel caso di divergenza sul piano di H si può scrivere per l'intensità del vettore di Poynting, a meno di termini costanti:

$$P(\phi) \propto \frac{\cos^2(\pi\phi/\phi_0)}{\rho} \quad (6.59)$$

Considerando le radici quadrate della (2.47) per passare ai campi, sostituendo la (2.48) e ricavando la derivata $d\phi/dy$ in base alla (2.46) ed alla relazione geometrica $y = \rho \sin \phi$, si ricava l'andamento della funzione di illuminazione a meno di un fattore costante pari al campo al centro dell'apertura (evidentemente determinato dalla potenza immessa nella guida):

$$\frac{E(y)}{E(0)} = \cos\left(\frac{\pi\phi}{\phi_0}\right) \left(\frac{d\phi}{dy}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n \cos \phi - 1}{\sqrt{(n - \cos \phi)(n - 1)}} \cos\left(\frac{\pi\phi}{\phi_0}\right) \quad (6.60)$$

Dimostrazione

Dalla relazione $y = \rho \sin \phi$ e considerando l'espressione di $\rho(\phi)$ ricavata si ricava la derivata $dy/d\phi$:

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{(n-1)f \cos \phi (n \cos \phi - 1) - (n-1)f \sin \phi (-n \sin \phi)}{(n \cos \phi - 1)^2} = \frac{(n-1)fn \cos^2 \phi - (n-1)f \cos \phi + (n-1)fn \sin^2 \phi}{(n \cos \phi - 1)^2}$$

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{(n-1)fn - (n-1)f \cos \phi}{(n \cos \phi - 1)^2} = \frac{(n-1)f(n - \cos \phi)}{(n \cos \phi - 1)^2}$$

La densità di potenza lungo y :

$$P(y) = P(\phi) \rho \frac{d\phi}{dy} = P(\phi) \frac{(n-1)f}{n \cos \phi - 1} \frac{(n \cos \phi - 1)^2}{(n-1)f(n - \cos \phi)} = P(\phi) \frac{n \cos \phi - 1}{n - \cos \phi}$$

Sostituendo l'andamento di $P(\phi)$ nel caso particolare di timbra divergente lungo H :

$$P(y) = P(\phi) \frac{n \cos \phi - 1}{n - \cos \phi} = \frac{\cos^2(\pi\phi/\phi_0)}{\rho(\phi)} \frac{n \cos \phi - 1}{n - \cos \phi} = P(0) \cos^2\left(\frac{\pi\phi}{\phi_0}\right) \frac{(n \cos \phi - 1)^2}{(n-1)(n - \cos \phi)}$$

Dove si è scelto come riferimento la densità di potenza al centro della lente:

$$P(0) = \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2 f} = 1/f$$

Per passare ai campi elettrici $E(y)/E(0)$ si deve semplicemente fare la radice quadrata.

La figura (2.24) illustra diversi andamenti della funzione di illuminazione che si ottengono per diversi valori dell'indice di rifrazione della lente. Con indici di rifrazione più grandi la lente risulta meno convessa. Si noti la diversa rastremazione della funzione di illuminazione che si ottiene al variare di n . Questo produce diversi comportamenti radiativi dell'antenna in termini di direttività e lobi laterali ed in particolare lenti con minore indice di rifrazione e con illuminazione più rastremata avranno minore direttività ma lobi laterali inferiori. La figura (2.25) mostra invece l'effetto dell'angolo di divergenza sul diagramma di radiazione.

La presenza di una lente determina, oltre al fenomeno di rifrazione voluto al fine di eliminare l'errore di fase, anche fenomeni di riflessione su entrambe le superfici a contatto con l'aria. Queste riflessioni peggiorano il rendimento di adattamento dell'antenna. Esse possono essere limitate con opportuni trattamenti superficiali della lente (strati antiriflettenti o superfici corrugate).

Infine si osserva come la trattazione fatta ha determinato la funzione di illuminazione in base solo alla variazione della densità di potenza (metodo del tubo di flusso) e quindi non tiene in conto della polarizzazione. In effetti per ogni raggio che incide sulla lente esisterà una componente parallela e ortogonale del campo rispetto alla lente stessa, i cui coefficienti di riflessione e trasmissione sono diversi (coefficienti di Fresnel). Per determinare la polarizzazione del campo sulla bocca occorrerebbe una trattazione che tiene conto di questo aspetto.

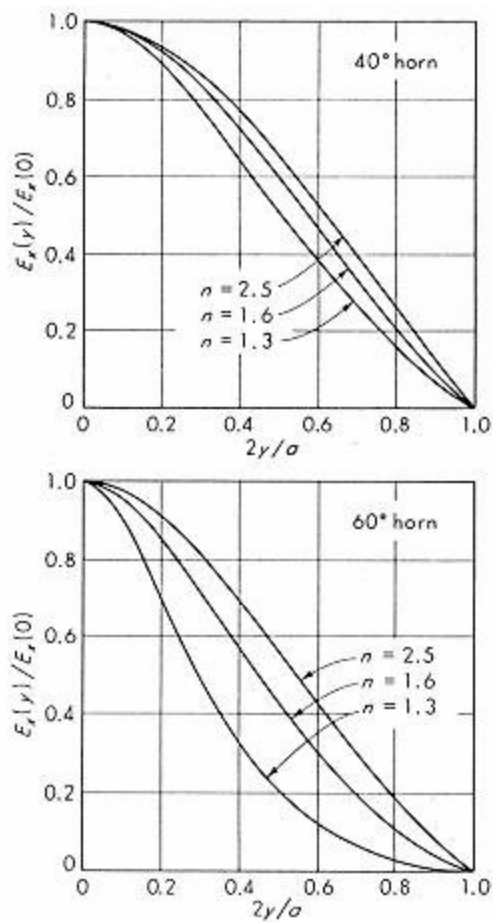


Fig. 6.1 (Ref. C.A. Balanis, "Antenna Theory"): Distribuzione normalizzata del campo sull'apertura per trombe con lente divergenti sul piano H e diversi valori dell'indice di rifrazione.

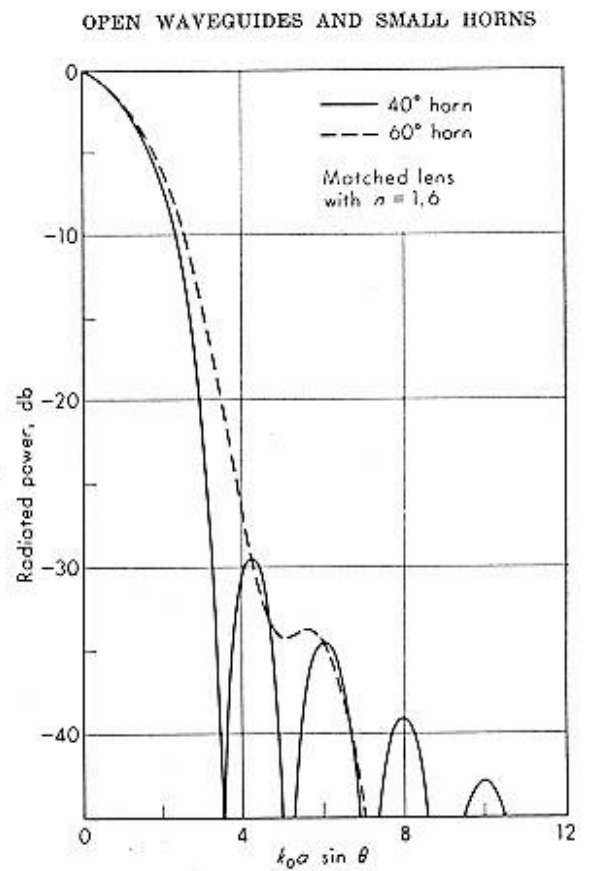


Fig. 6.2 (Ref. C.A. Balanis, "Antenna Theory"): Diagramma di radiazione teorico (linea continua) per trombe con lente adattata divergente sul piano H.

6.4 Polinomi di Schelkunoff

Il fattore di allineamento per un allineamento rettilineo equidistante costituito da n elementi alimentati con ampiezza a_m e sfasamento δ , avendo introdotto la variabile di radiazione $u = \delta + k_0 d \cos \theta$, si scrive:

$$F(u) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m e^{jmu} \quad (6.61)$$

Introducendo una nuova variabile di radiazione $\xi = e^{ju}$ è possibile porre il fattore di allineamento nella forma di un polinomio di grado $n-1$:

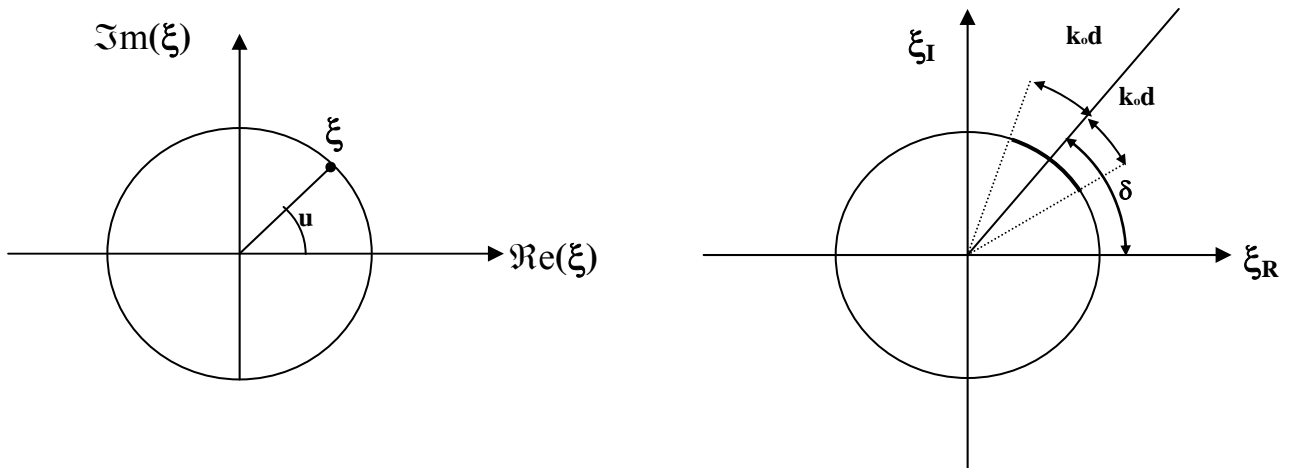
$$F(u) = F(\xi) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \xi^m = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_{n-1} \xi^{n-1} \quad (6.62)$$

Questa forma polinomiale (polinomi di Schelkunoff) permette di interpretare il fattore di allineamento in maniera utile alla sintesi dell'antenna, ovvero alla determinazione dei coefficienti di alimentazione a_m e dello sfasamento δ . In particolare, un polinomio di grado $n-1$ nella variabile ξ avrà $n-1$ zeri $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_{n-1}$ e si potrà scrivere nella forma seguente:

$$F(\xi) = a_{n-1} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3) \dots (\xi - \xi_{n-1}) \quad (6.63)$$

Il fattore di allineamento è pertanto il prodotto dei fattori di allineamento di $n-1$ doppietti i cui zeri costituiscono anche gli zeri dell'allineamento a n elementi. Un qualunque polinomio di grado $n-1$ può essere interpretato come fattore di allineamento di un allineamento a n elementi.

Ricordiamo che la variabile u è nel visibile, ovvero l'angolo θ è reale, solo in un certo intervallo. Poiché $\xi = e^{ju}$ per valori reali di u esso è un numero complesso ed il suo modulo è unitario. La variabile ξ sul piano complesso si troverà pertanto su una circonferenza di raggio unitario. La regione visibile corrisponde solo ad una porzione di tale circonferenza (ovvero un arco di visibilità) in cui u è compresa tra $-k_0 d + \delta$ e $k_0 d + \delta$, come illustrato in figura. La lunghezza di questo arco dipende dalla distanza d tra gli elementi. In figura è riportato un caso con d piccolo rispetto a λ . Con d pari a $\lambda/2$ tutta la circonferenza diventa visibile. Con d ancora maggiore nel visibile parti di circonferenza sono percorse più volte. Gli zeri che cadono sulla circonferenza unitaria nella regione visibile sono pertanto zeri del diagramma di radiazione dell'allineamento. Gli altri zeri sul piano complesso, ed in particolare tutti quelli interni o esterni alla circonferenza unitaria, non sono invece visibili ma tuttavia influenzano la forma del diagramma di radiazione.



La posizione degli zeri può essere scelta opportunamente pensando che la funzione di allineamento in modulo, scorrendo la variabile ξ lungo l'arco di visibilità, viene ad essere il prodotto delle distanze Euclidee tra il punto corrente e gli zeri del polinomio. Dove lo zero si trova sull'arco di visibilità, corrisponderà come si è detto ad un effettivo zero del diagramma di radiazioni e pertanto abbasserà i lobi laterali anche nell'intorno di quella direzione. Mettendo più zeri vicini si otterrà un abbassamento ancora più rilevante dei lobi laterali. Se si considera uno zero doppio, oltre alla funzione di radiazione si annulla anche la sua derivata e pertanto ciò mantiene più bassi i lobi laterali. Nei punti dell'arco di visibilità dove gli zeri non sono prossimi la funzione di allineamento è più grande. Questa situazione possiamo sceglierla in corrispondenza delle direzioni in cui i lobi laterali sono meno critici.

Un'ulteriore tecnica di sintesi per il fattore di allineamento (assumendo per semplicità i singoli elementi dell'allineamento siano isotropi) consiste nell'imporre il valore di esso in un certo numero q di punti, ovvero imporre che valga $S_0, S_1, S_2, \dots S_{q-1}$ nei punti $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(q-1)}$, scrivendo q equazioni nelle incognite a_m :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} a_m \xi^{(0)m} &= S_0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} a_m \xi^{(1)m} &= S_1 \\ &\text{-----} \\ &\text{-----} \\ \sum_{m=0}^{n-1} a_m \xi^{(q-1)m} &= S_{q-1} \end{aligned} \quad (6.64)$$

Se $q=n$ si può risolvere il sistema di equazioni. Se $q>n$ si devono aggiungere altri radiatori o fare in modo che le equazioni non siano indipendenti. I punti $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(q-1)}$ verranno opportunamente scelti per meglio determinare il fattore di allineamento nelle direzioni di maggiore interesse.

6.5 Metodo della trasformata di Fourier (“beam shaping”)

Al crescere del numero di elementi di un allineamento lineare e rettilineo a parità di lunghezza complessiva la sommatoria che esprime il fattore di allineamento diventa una espressione integrale e si ottiene quanto già ricavato nel caso di distribuzione continua di corrente filiforme lungo l'asse z :

$$F(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{jmu} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{jm(k_0 d \cos \theta + \delta)} \Rightarrow F(\theta) = \int_{-l/2}^{l/2} I(z') e^{j[k_0 z' \cos \theta + \delta(z')]} dz' \quad (6.65)$$

dove $\delta(z')$ rappresenta una variazione lineare di fase della corrente lungo l'asse z . Esso esprime il fattore di allineamento di un allineamento in cui i singoli elementi sono dei dipoli *elementari* allineati lungo z e che vengono a formare la distribuzione di corrente filiforme $I(z)$. Viceversa, una distribuzione di corrente filiforme $I(z)$ può approssimarsi mediante un insieme di radiatori elementari se operiamo una opportuna discretizzazione. Se infatti introduciamo una funzione a “rastrello” come somma di funzioni di Dirac equispaziate lungo l'asse z :

$$\text{III}(z) = \delta(z) + \delta(z-1) + \delta(z-2) + \dots \quad \text{III}(z/d) = \delta(z) + \delta(z-d) + \delta(z-2d) + \dots \quad (6.66)$$

e moltiplichiamo la corrente $I(z)$ per una funzione a rastrello spaziata della quantità d si ottiene la funzione di allineamento:

$$F(\theta) = \int_0^{\infty} I(z') e^{jk_0 z' \cos \theta} dz' \Rightarrow F(\theta) = \int_0^{\infty} I(z') \text{II}(z/d) e^{jk_0 z' \cos \theta} dz' = \sum_{m=0}^{\infty} I(md) e^{jk_0 md \cos \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{jk_0 md \cos \theta} \quad (6.67)$$

Operando una discretizzazione più fine (passo d) l'approssimazione di una sorgente continua con una discreta diventa sempre più valida.

6.5a Sintesi di distribuzioni continue di corrente

Poiché la corrente $I(z)$ di una sorgente continua reale si annulla al di fuori di un certo intervallo di z , possiamo estendere l'integrale all'infinito:

$$F(\theta) = F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z') e^{jk_0 z' \cos \theta + \delta} dz' = \int_{-\infty}^{\infty} I(z') e^{j\xi z'} dz' \quad (6.68)$$

L'integrale non è altro che la trasformata di Fourier monodimensionale della corrente $I(z)$, supposta trasformabile. Se imponiamo una certa forma della funzione $F(\theta)$, ovvero un certo diagramma di radiazione, potremo quindi scrivere la corrente come trasformata di Fourier:

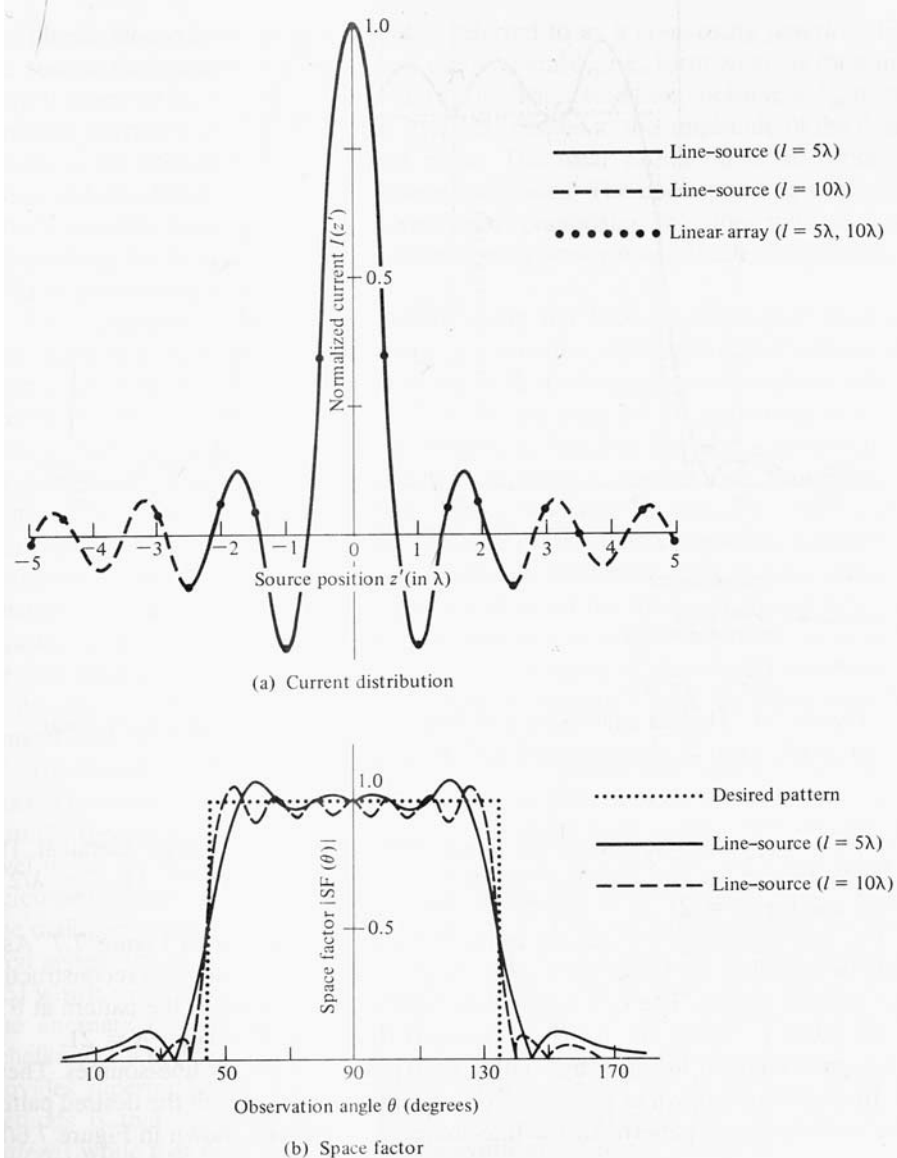
$$I(z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-j\xi z'} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) e^{-j\xi z'} d\xi \quad (6.69)$$

Si vede come la corrente $I(z)$ è in genere definita e diversa da zero su tutto $z \in [-\infty, +\infty]$. Essendo la sorgente fisicamente limitata e di lunghezza l , la distribuzione di corrente realizzabile praticamente sarà senz'altro troncata al di fuori dell'intervallo $[-l/2, +l/2]$. Pertanto, espressa la corrente che produce una determinata funzione $F(\theta)$ mediante l'operazione di antitrasformazione, la corrente effettiva $I_a(z)$ sarà:

$$I_a(z') = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-j\xi z'} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) e^{-j\xi z'} d\xi & -l/2 \leq z' \leq +l/2 \\ 0 & z' \leq -l/2 \quad l/2 \leq z' \end{cases} \quad (6.70)$$

Si dimostra che il diagramma reale dell'antenna $F_a(\xi)$ approssima il diagramma desiderato $F(\xi)$ minimizzando l'errore quadratico medio su tutto l'asse ξ . Tale comportamento non è però verificato sulla sola porzione visibile di ξ , ovvero con angolo θ reale, ovvero possono esistere in tale regione del visibile approssimazioni migliori nel senso dei minimi quadrati. Utilizzando questo metodo si possono applicare tutte le note proprietà della trasformata di Fourier per le diverse caratteristiche del diagramma di radiazione a quelle della distribuzione di corrente e viceversa.

In figura è illustrato l'esempio di un progetto per una diagramma di radiazione diverso da zero in un intervallo angolare di 90° e nullo all'esterno. La trasformata di Fourier è illimitata e il suo troncamento determina un diagramma di radiazione che approssima quello voluto ma presenta dei fenomeni di oscillazione. In questo esempio le forti oscillazioni derivano anche dall'aver imposto un diagramma di radiazione che presenta una discontinuità.



6.5.b Sintesi di allineamenti

Nel caso di un allineamento di N elementi il fattore di allineamento $F(\xi)$ è una combinazione di termini $e^{jm\xi}$ ed è pertanto una funzione periodica in ξ che si ripete ogni $T=2\pi$ radianti. I coefficienti a_m coincidono con i termini dello sviluppo in serie di Fourier della funzione periodica $F(\xi)$. Per direzioni θ reali (nel visibile) ξ va da $-k_0d+\delta$ a $+k_0d+\delta$ e se vogliamo limitarci a considerare un solo periodo della funzione $F(\xi)=F(\theta)$ ed evitare sfrangiamenti del pattern di radiazione (*grating lobes*) dovremo scegliere $2k_0d=2\pi$, ovvero $d=\lambda/2$ od eventualmente più piccolo. Imposto pertanto il pattern d'antenna $F(\xi)$ con la condizione che sia periodico con periodo $T=2\pi$ (ed eventualmente bisognerà aggiungere degli zeri per renderlo tale) e scelto il numero di elementi N possiamo considerare le formule che esprimono lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica per determinare le ampiezze dei singoli elementi dell'allineamento. E' opportuno scrivere il fattore di allineamento rispetto ad una origine del sistema di riferimento al centro dell'antenna ed a seconda se il numero di elementi è dispari (esiste un elemento centrale a_0) o pari si ottiene per i coefficienti a_m :

$$F(\theta) = F(\xi) = \sum_{m=-M}^{m=M} a_m e^{jm\xi}$$

$$a_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(\xi) e^{-jm\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi) e^{-jm\xi} d\xi \quad -M \leq m \leq M \quad N=2M+1 \text{ dispari} \quad (6.71)$$

$$F(\theta) = F(\xi) = \sum_{m=-M}^{m=-1} a_m e^{j[(2m+1)/2]\xi} + \sum_{m=1}^{m=M} a_m e^{j[(2m-1)/2]\xi}$$

$$a_m = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(\xi) e^{-j[(2m+1)/2]\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi) e^{-j[(2m+1)/2]\xi} d\xi & -M \leq m \leq -1 \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(\xi) e^{-j[(2m-1)/2]\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi) e^{-j[(2m-1)/2]\xi} d\xi & 1 \leq m \leq M \end{cases} \quad N=2M \text{ pari} \quad (6.72)$$

6.5.c Tecnica di sintesi di Woodward-Lawson

Si assume che la corrente di una sorgente continua si possa esprimere come somma di un numero finito di sorgenti uniformi aventi andamento armonico ovvero:

$$i_m(z') = \frac{b_m}{l} e^{-jk_0 z' \cos \theta_m} \quad ; \quad I(z') = \frac{1}{l} \sum_m b_m e^{-jk_0 z' \cos \theta_m} \quad -1/2 \leq z' \leq 1/2 \quad (6.73)$$

Ciascuna sorgente uniforme ha una funzione di radiazione $F_m(\theta)$ pari alla trasformata di Fourier che coincide come è noto con una funzione $\text{sinc}(l\xi/2\pi) = \text{sinc}(l\xi/2)/l\xi/2$ per cui:

$$F_m(\theta) = F_m(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} i_m(z') e^{j\xi z'} dz' = \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} b_m e^{j\xi z' - jk_0 z' \cos \theta_m} dz' = b_m \frac{\sin \left[\frac{k_0 l}{2} (\cos \theta - \cos \theta_m) \right]}{\frac{k_0 l}{2} (\cos \theta - \cos \theta_m)} \quad (6.74)$$

Il massimo di questi termini si ha per $\theta = \theta_m$. La funzione di radiazione complessiva si ottiene come somma dei singoli contributi:

$$F(\theta) = F(\xi) = \sum_m b_m \frac{\sin \left[\frac{k_0 l}{2} (\cos \theta - \cos \theta_m) \right]}{\frac{k_0 l}{2} (\cos \theta - \cos \theta_m)} \quad (6.75)$$

La tecnica di progetto consiste nello scegliere le direzioni θ_m in cui si deve ottenere un pattern d'antenna prefissato e nel determinare la condizione per cui in corrispondenza del massimo di una determinata $F_m(\theta)$ associata a ciascuna armonica tutte le altre armoniche hanno dei nulli nel loro pattern. Al verificarsi di questa condizione in ogni direzione

prefissata la funzione di radiazione coincide con l'ampiezza della relativa funzione armonica associata ovvero le ampiezze delle funzioni armoniche soddisfano la semplice condizione:

$$b_m = F(\theta) \Big|_{\theta=\theta_m} = F(\theta_m) \quad (6.76)$$

Tale condizione si verifica se l'argomento della funzione seno a numeratore della $F(\theta)$ risulta essere un multiplo di π per cui la funzione seno si annulla. Dovrà verificarsi quindi:

$$\frac{k_0 z' \cos \theta}{2} \Big|_{\substack{z'=l \\ \theta=\theta_m}} = \frac{k_0 l \cos \theta_m}{2} = m\pi \Rightarrow \cos \theta_m = m \frac{\lambda}{l} \Rightarrow \theta_m = \cos^{-1} \left(m \frac{\lambda}{l} \right) \quad (6.77)$$

La tecnica consiste pertanto nello scegliere gli angoli di campionamento della funzione di radiazione in base alla precedente e quindi imporre le ampiezze delle singole componenti armoniche pari al valore della funzione di radiazione che si deve ottenere in quella direzione.