

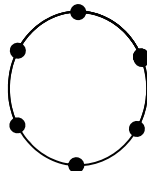
5. ALLINEAMENTI DI ANTENNE

5.1 ASPETTI GENERALI

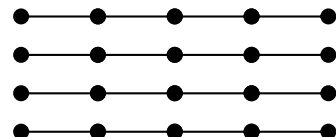
- ❑ Le applicazioni di telecomunicazioni e telerilevamento richiedono valori elevati di direttività e/o forme particolari del diagramma di radiazione. In alternativa alla realizzazione di antenne complesse e di grandi dimensioni (es., riflettori), si realizzano antenne costituite da un gran numero di strutture radianti più semplici.
- ❑ Un **allineamento (array)** di antenne è costituito da un insieme di antenne (**elementi** dell'allineamento), collegate tra loro alle porte di ingresso/uscita. Possono essere disposte lungo una linea (**allineamento lineare**), su una superficie (**allineamento planare** o **cortina**) o nello spazio (allineamento tridimensionale). Agendo sulla disposizione geometrica (forma e distanza tra gli elementi), sull'eccitazione in ampiezza e fase e sulle caratteristiche radiative delle singole antenne è possibile ottenere le forme più svariate della funzione di radiazione e valori di direttività elevati anche a partire da antenne poco direttive.
- ❑ Elevata direttività è ottenuta da singoli elementi poco direttivi facendo in modo che i campi elettromagnetici irradiati nella direzione di interesse (di massima direttività) si compongano tutti in fase, mentre nelle altre direzioni si determinino contributi di campo tra loro in opposizione di fase. Le proprietà dell'allineamento sono, pertanto, determinate dal fenomeno di interferenza costruttiva o distruttiva tra i diversi campi radiati, governato dalla mutua disposizione geometrica degli elementi e dalla fase della loro eccitazione.
- ❑ **Principio di similitudine:** ipotesi che la distribuzione di corrente nelle singole antenne che formano l'allineamento sia uguale (a meno di una costante complessa) a quella dell'antenna isolata nello spazio. Si trascurano fenomeni di accoppiamento induttivo o capacitivo tra antenne che ne possono variare le proprietà radianti a secondo della loro posizione nell'allineamento. Tale ipotesi può cadere quando gli elementi sono disposti molto vicini tra loro, per cui la corrente può essere modificata da fenomeni di induzione mutua e accoppiamento capacitivo determinati dalle antenne più prossime.
- ❑ Negli **allineamenti rettilinei** le antenne sono tutte disposte lungo una retta. Un allineamento rettilineo può a sua volta essere distinto in **uniforme** e **non uniforme**. Nel primo caso le varie antenne sono alimentate con la stessa corrente in modulo, ma con possibilità di sfasamento. Qualora queste condizioni non vengano rispettate l'allineamento si dice non uniforme. Distingueremo anche il caso particolare di allineamento **equidistante**, in cui le antenne contigue sono poste a distanze tutte uguali.



Allineamento rettilineo
equidistante



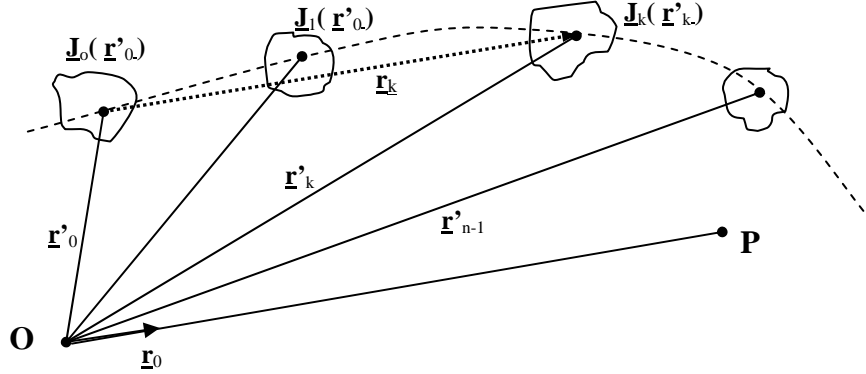
Allineamento circolare



Allineamento planare o
cortina

5.2 FATTORE DI ALLINEAMENTO

- L'antenna k-esima di un allineamento costituito da n antenne ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) è rappresentata dalla distribuzione di densità di correnti impresse (elettiche e/o magnetiche) $\underline{\mathbf{J}}_k(\underline{\mathbf{r}}'_k)$ con i punti di sorgente individuati dai vettori $\underline{\mathbf{r}}'_k$ nel sistema di riferimento di origine \mathbf{O} . Si noti che \mathbf{P} è il punto di osservazione; $\underline{\mathbf{r}}_0$ è il versore nella direzione di osservazione; $\underline{\mathbf{r}}_k$ è il vettore di traslazione del k-esimo elemento rispetto al quello di riferimento $k=0$; θ, φ rappresentano la direzione di osservazione in coordinate polari.



- In base all'*ipotesi di similitudine* le antenne sono uguali, ma alimentate in ampiezza ed in fase in modo differente. La densità di corrente $\underline{\mathbf{J}}_k(\underline{\mathbf{r}}'_k)$ dell'antenna k-esima in un generico punto si ottiene dalla distribuzione $\underline{\mathbf{J}}_0(\underline{\mathbf{r}}'_0)$ dell'antenna di riferimento per semplice traslazione (di un vettore $\underline{\mathbf{r}}_k$ di traslazione) e moltiplicazione per una coefficiente complesso a_k . In formule:

$$\underline{\mathbf{r}}'_k = \underline{\mathbf{r}}'_0 + \underline{\mathbf{r}}_k \quad \underline{\mathbf{J}}_k(\underline{\mathbf{r}}'_k) = \underline{\mathbf{J}}_k(\underline{\mathbf{r}}'_0 + \underline{\mathbf{r}}_k) = a_k \underline{\mathbf{J}}_0(\underline{\mathbf{r}}'_0)$$

- Ricordiamo che per una generica distribuzione di sorgenti nello spazio libero ogni componente vettoriale del campo osservato $\underline{\mathbf{E}}$ in zona di Fraunhofer nella direzione θ, φ (direzione del versore $\underline{\mathbf{r}}_0$) si esprime come combinazione delle trasformate di Fourier delle diverse componenti vettoriali delle sorgenti calcolate per $\underline{\mathbf{k}} = k_x \underline{\mathbf{x}}_0 + k_y \underline{\mathbf{y}}_0 + k_z \underline{\mathbf{z}}_0 = k_0 \underline{\mathbf{r}}_0 = k_0 \sin\theta \cos\varphi \underline{\mathbf{x}}_0 + k_0 \sin\theta \sin\varphi \underline{\mathbf{y}}_0 + k_0 \cos\theta \underline{\mathbf{z}}_0$, come espresso dalle note formule di radiazione (si veda cap. 2):

$$E_\theta(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_\theta(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}' - \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_{m\varphi}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

$$E_\varphi(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_\varphi(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V J_{m\theta}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

- Nel caso in esame, per la linearità delle eq. di Maxwell in un mezzo lineare, il campo $\underline{\mathbf{E}}$ irradiato dall'allineamento di antenne è la somma di quello $\underline{\mathbf{E}}_k$, generato dalla k-ma antenna appartenente al sistema di n antenne:

$$E_\theta(\underline{\mathbf{r}}) = \sum_{k=0}^{n-1} E_{k\theta}(\theta, \varphi) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \sum_{k=0}^{n-1} \int_V J_{k\theta}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}' - \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \sum_{k=0}^{n-1} \int_V J_{km\varphi}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

$$E_\varphi(\underline{\mathbf{r}}) = \sum_{k=0}^{n-1} E_{k\varphi}(\theta, \varphi) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \sum_{k=0}^{n-1} \int_V J_{k\varphi}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \sum_{k=0}^{n-1} \int_V J_{km\theta}(\underline{\mathbf{r}}') e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

- In analogia a quanto fatto nel caso di antenne ad apertura, una generica componente delle sorgenti (indifferentemente magnetiche o elettriche, ovvero $J_{k\theta}$, $J_{k\varphi}$, $J_{k\varphi}$ e $J_{k\theta}$) viene chiamata **funzione di illuminazione** $f_k(\mathbf{r}')$, mentre la relativa trasformata di Fourier viene chiamata **funzione di radiazione** $F_k(\mathbf{k})$. Si noti che $F_k(\mathbf{k})$ si riduce a una trasformata unidimensionale nel caso di antenne lineari e ad una trasformata bidimensionale nel caso di antenne ad apertura. Per la linearità la funzione di radiazione totale dell'allineamento $F(\mathbf{k})=F(\theta,\varphi)$ è la somma delle funzioni di radiazione dei diversi elementi:

$$F(\mathbf{k}) = F(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(\mathbf{k}) = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(\theta, \varphi)$$

Mentre per la funzione di illuminazione $f_k(\mathbf{r}'_k)$ della k-esima antenna, la proprietà di similitudine comporta:

$$f_k(\mathbf{r}'_k) = f_k(\mathbf{r}'_o + \mathbf{r}_k) = a_k f_o(\mathbf{r}'_o)$$

- Siccome la funzione di radiazione $F_k(\mathbf{k})$ del generico elemento k-esimo si ottiene come trasformata di Fourier in $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{r}_0$ della funzione di illuminazione, utilizzando la proprietà di similitudine si ottiene:

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\mathbf{r}'_k) e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_k} d^3 \mathbf{r}'_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-\infty}^{\infty} f_o(\mathbf{r}'_o) e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_k + jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_o} d^3 \mathbf{r}'_k$$

Portando fuori dell'integrale anche il termine $e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_k}$ e considerando che $d\mathbf{r}'_o = d\mathbf{r}'_k$, si ha:

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_k} \int_{-\infty}^{\infty} f_o(\mathbf{r}'_o) e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_o} d^3 \mathbf{r}'_k = \int_{-\infty}^{\infty} f_o(\mathbf{r}'_o) e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_o} d^3 \mathbf{r}'_o \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_k}$$

- La funzione di radiazione dell'allineamento $F(\mathbf{k})=F(\theta,\varphi)$ pertanto diviene:

$$F(\theta, \varphi) = F_o(\theta, \varphi) \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_k} = F_o(\theta, \varphi) F_a(\theta, \varphi)$$

ove $F_o(\theta,\varphi)$ rappresenta la funzione di radiazione del primo elemento (e per similitudine, a meno di una costante complessa, di ogni elemento) data da:

$$F_o(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_o(\mathbf{r}'_o) e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_o} d^3 \mathbf{r}'_o$$

mentre $F_a(\theta, \varphi)$ è il **fattore di allineamento** o **fattore di cortina**:

$$F_a(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_k} = \sum_{i=1}^n a_i e^{jk_o \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}'_i}$$

ove nell'ultima espressione si è utilizzato l'indice $i=k+1$ ($i=1,2, \dots n$) al posto di k ($k=0, 1, \dots n-1$).

- Il **teorema fondamentale degli allineamenti** afferma dunque che, assunta l'ipotesi di similitudine e la proprietà di linearità delle equazioni di Maxwell, la funzione di radiazione dell'allineamento $F(\theta,\varphi)$ è pari al prodotto della funzione di radiazione della singola antenna di riferimento $F_o(\theta,\varphi)$ moltiplicata per il **fattore di allineamento** o **fattore di cortina** $F_a(\theta,\varphi)$:

- Come già richiamato, le formule di radiazione esprimono le componenti del campo come combinazione delle componenti della funzione vettoriale di radiazione (e.g., componenti delle trasformate delle sorgenti elettriche e magnetiche $J_{k\theta}$, $J_{k\varphi}$, $J_{k\theta}$ e $J_{k\varphi}$). Il fattore di allineamento $F_a(\theta, \varphi)$ costituisce un fattore comune che si mette in evidenza per cui si ricava anche per le componenti del campo totale \underline{E} prodotte dall'allineamento:

$$\begin{cases} E_\theta(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} E_{k\theta}(\theta, \varphi) = E_{0\theta}(\theta, \varphi) \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_o \cdot \mathbf{r}_k} = E_{0\theta}(\theta, \varphi) F_a(\theta, \varphi) \\ E_\varphi(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} E_{k\varphi}(\theta, \varphi) = E_{0\varphi}(\theta, \varphi) \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_o \cdot \mathbf{r}_k} = E_{0\varphi}(\theta, \varphi) F_a(\theta, \varphi) \end{cases}$$

essendo \underline{E}_0 il campo prodotto dal singolo radiatore (di riferimento). Si deduce inoltre che per la densità di potenza P e intensità di radiazione U dell'allineamento si ha:

$$\begin{cases} P(\theta, \varphi) = P_0(\theta, \varphi) |F_a(\theta, \varphi)|^2 \\ U(\theta, \varphi) = U_0(\theta, \varphi) |F_a(\theta, \varphi)|^2 \end{cases}$$

essendo P_0 e U_0 la densità di potenza e l'intensità di radiazione del singolo radiatore (antenna).

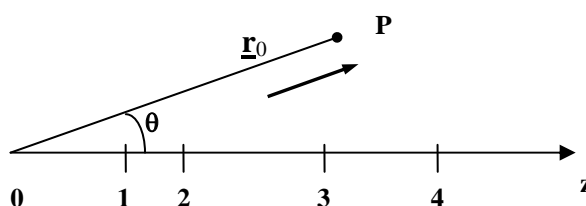
Note:

- La funzione di radiazione e l'intensità di radiazione dell'allineamento sono determinati da due fattori, F_0 dipendente dal tipo di antenna usata per generare l'allineamento e il fattore di allineamento F_a che dipende solo dalla configurazione geometrica e dai coefficienti di eccitazione.
- Il fattore di allineamento è pari alla funzione di radiazione nel caso i singoli radiatori siano isotropi ovvero $F_0(\theta, \varphi) = 1$.
- Possono essere realizzate antenne di proprietà diverse determinando opportunamente disposizione geometrica (i diversi \mathbf{r}_k) ed eccitazioni (le costanti a_k) dei diversi elementi.

5.3 ALLINEAMENTI RETTILINEI

- Gli allineamenti si dicono rettilinei se gli elementi sono disposti su una retta (asse dell'allineamento); assumendo l'asse dell'allineamento coincida con l'asse z , il vettore di traslazione è parallelo al versore \underline{z}_0 ovvero $\underline{r}_k = z_k \underline{z}_0$, mentre il prodotto scalare $\underline{r}_0 \cdot \underline{r}_k$ è il coseno dell'angolo θ formato dalla direzione di osservazione con la direzione z ; il fattore di allineamento diventa:

$$F_a(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_o z_k \cos \theta}$$



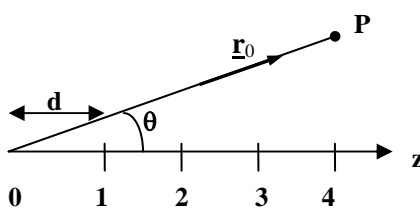
5.3.a Allineamenti rettilinei equidistanti

- Gli allineamenti rettilinei con elementi posti regolarmente alla stessa distanza d si dicono equidistanti. Ricordiamo l'espressione del fattore di allineamento trovata per allineamenti rettilinei:

$$F_a(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_o z_k \cos \theta}$$

- Nell'allineamento equidistante la traslazione dell'elemento k -esimo vale $z_k = kd$ e pertanto il fattore di allineamento diventa:

$$F_a(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_o kd \cos \theta} = \sum_{i=1}^n a_i e^{jk_o (i-1)d \cos \theta}$$



- Il coefficiente di eccitazione $a_k = |a_k| e^{i\delta k}$ può essere scelto con ampiezza arbitraria ma la fase viene fatta variare linearmente lungo l'asse dell'allineamento. Questo permette di variare la direzione di massima direttività (si veda nel seguito). Per allineamenti equidistanti la differenza di fase δ tra elementi contigui è costante e la fase δ_k dell'elemento k -esimo vale $k\delta$. Pertanto il fattore di allineamento si può scrivere:

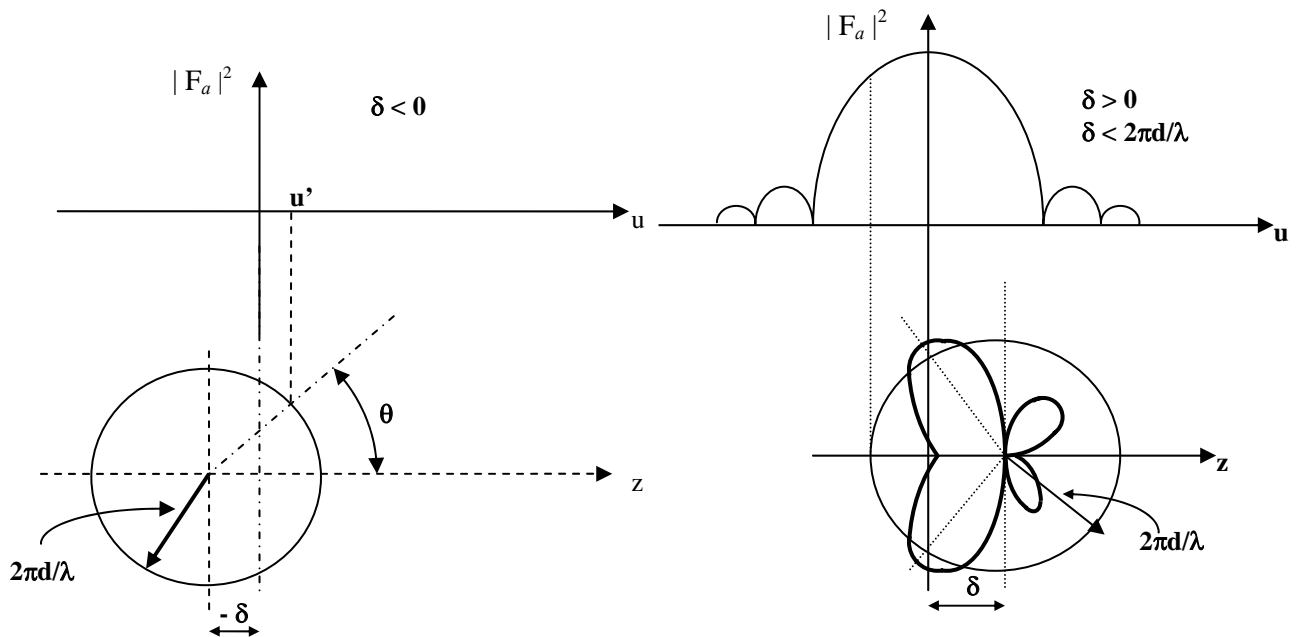
$$F_a(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| e^{jk\delta} e^{jk_o kd \cos \theta} = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| e^{jku}$$

dove si è introdotta la seguente variabile di radiazione per allineamenti rettilinei equidistanti:

$$u = \delta + k_o d \cos \theta = \delta + \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta$$

5.3.b Cerchio di visibilità per allineamenti rettilinei equidistanti

- E' una costruzione grafica che permette di ricavare il diagramma di radiazione in coordinate polari a partire da quello espresso in funzione della variabile di radiazione u .



Cerchio di visibilità e legame grafico tra direzione θ e variabile di radiazione u (a sinistra) e costruzione grafica del diagramma di radiazione polare (a destra).

- Tracciamo una circonferenza di raggio pari a $2\pi d/\lambda$ centrata sull'asse dell'allineamento con centro distante δ dall'origine e consideriamo una generica semiretta nella direzione di osservazione che esce dal centro della circonferenza e forma un angolo θ con l'asse z . La proiezione del punto così individuato sulla circonferenza sull'asse z è pari alla variabile u :

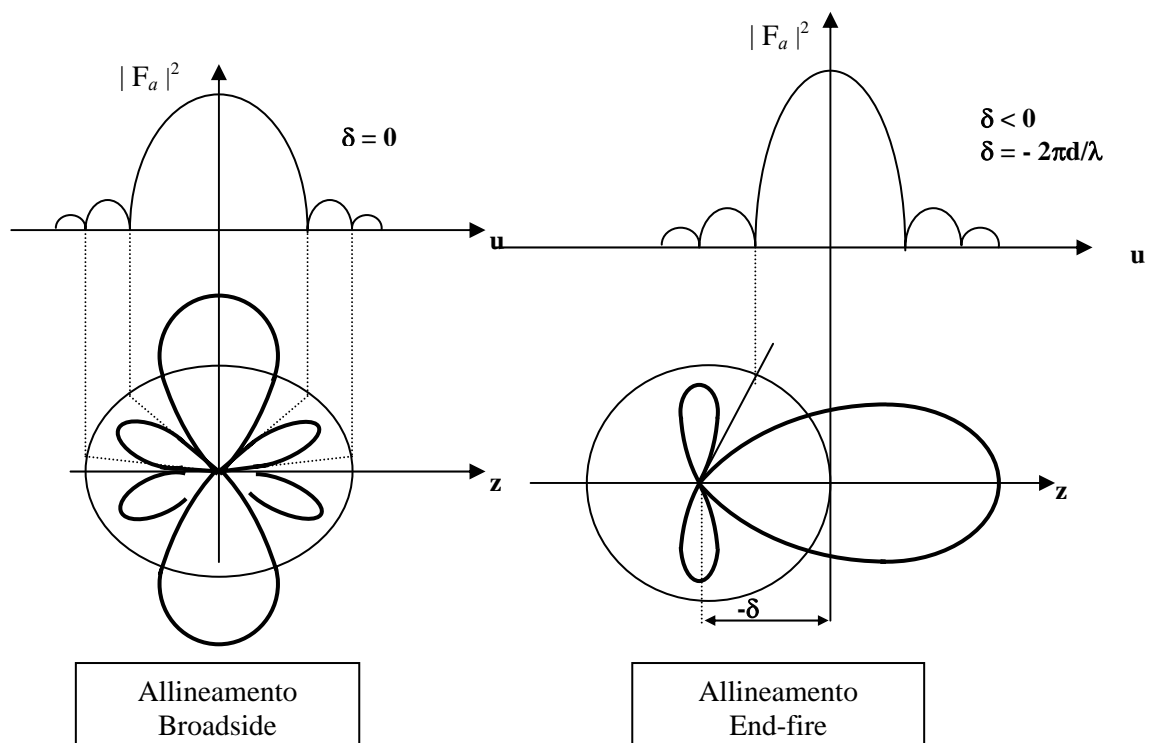
$$u = \delta + \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta = \delta + k_o d \cos \theta$$

- Volendo tracciare il diagramma di radiazione di un allineamento di antenne isotrope, poniamo al di sopra il grafico cartesiano di $|F_a|^2$ con l'asse delle ascisse u parallelo all'asse z e con origini allineate. Il diagramma di radiazione nella direzione considerata si ricava riportando il punto così proiettato sull'asse u e leggendo il corrispondente valore del modulo della funzione di radiazione $|F_a(u)|^2$. Tale valore viene quindi riportato sulla semiretta come distanza dall'origine per individuare il punto ricercato del diagramma di radiazione polare. Inversamente, dato un valore di $|F_a(u)|^2$, il corrispondente valore dell'ascissa u viene proiettato verticalmente e l'intersezione con la circonferenza determina la direzione a cui si ha tale funzione di radiazione dell'antenna.

Nota:

- Rispetto al cerchio di visibilità introdotto per le antenne ad apertura abbiamo delle differenze legate alla diversa espressione della variabile di radiazione:
 1. il raggio del cerchio vale $2\pi d/\lambda$ invece che $\pi a/\lambda$;
 2. lo spostamento del centro del cerchio rispetto all'origine ($u=0$) è uguale a δ invece che $\pi \sin \theta_0/\lambda$
 3. l'angolo θ è definito rispetto all'asse dell'allineamento invece che rispetto alla normale alla apertura.

5.3.c Allineamenti di tipo “Broadside” e “End-fire”



- ❑ Eccitazione con fase nulla ($\delta=0$) (figura a sinistra). Assegnata $|F_a(u)|$, massima per $u=0$, il fattore di allineamento è massimo nella direzione ortogonale all'asse z ($\theta=\pi/2$) e il diagramma di radiazione è simmetrico intorno a z (diagramma toroidale). Si chiama allineamento di tipo **Broadside** o allineamento a fascio ortogonale (rispetto alla giacitura dell'allineamento stesso).
- ❑ Sfasamento pari al raggio del cerchio di visibilità e negativo, ovvero $\delta=-2\pi d/\lambda$ (figura a destra). Assegnata $|F_a(u)|$, si ottiene un massimo del fattore di allineamento nella direzione del semiasse z positivo ed un diagramma del fattore di allineamento “a pennello”. Con $\delta=+2\pi d/\lambda$ il massimo si ottiene nella direzione opposta. Si chiama allineamento di tipo **End-fire** o allineamento a fascio parallelo (rispetto alla giacitura dell'allineamento stesso).

Nota:

- Al solito, il diagramma di radiazione dell'allineamento si ottiene moltiplicando il fattore di allineamento per la funzione di radiazione delle antenne usate.
- Nel caso Broadside, se intendiamo realizzare un diagramma di radiazione toroidale possiamo utilizzare come singoli elementi dipoli elettrici allineati lungo l'asse z che hanno anche essi il massimo del diagramma di radiazione sul piano ortogonale a z . Se i dipoli fossero invece ortogonali a z il loro diagramma di radiazione avrebbe uno zero nella direzione ortogonale (asse del dipolo) che si sovrapporrebbe allo zero del fattore di allineamento, determinando un'antenna con un diagramma di radiazione piuttosto complesso.
- Un diagramma a pennello possiamo ottenerlo con dipoli disposti ortogonalmente all'asse di un allineamento End-fire; i diagrammi a “ciambella” dei dipoli si annullano nella direzione z negativa e si incrementano nella direzione z positiva di interesse.

5.4 ALLINEAMENTI RETTILINEI UNIFORMI

- ❑ Gli allineamenti uniformi sono allineamenti rettilinei equidistanti i cui tutte le antenne sono alimentate con la stessa corrente e con fase linearmente variabile.
- ❑ Allo scopo di confrontare allineamenti con numero di elementi n diverso a parità di corrente erogata dal trasmettitore, i coefficienti di eccitazione tutti uguali in modulo vengono assunti pari a:

$$a_k = \frac{1}{n} e^{jk\delta}$$

- ❑ Dalla espressione di $F(\theta)$ per allineamenti rettilinei equidistanti discende facilmente:

$$F_a(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{jk(\delta + k_o d \cos \theta)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{jk u} = \frac{1}{n} (1 + e^{ju} + e^{j2u} + \dots + e^{j(n-1)u})$$

- ❑ Utilizzando una nota formula per la somma di una successione geometrica di ragione e^{ju} :

$$F_a(\theta) = F_a(u) = \frac{1}{n} \frac{e^{jnu} - 1}{e^{ju} - 1} = \frac{1}{n} \frac{e^{jn\frac{u}{2}} - e^{-jn\frac{u}{2}}}{e^{j\frac{u}{2}} - e^{-j\frac{u}{2}}} = \frac{1}{n} e^{j(n-1)\frac{u}{2}} \frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$$

L'ultima eguaglianza può essere approssimata è valida per u piccola, ovvero distanza d piccola rispetto a λ , nel modo seguente

$$F_a(\theta) \approx e^{j(n-1)\frac{u}{2}} \frac{\sin n\frac{u}{2}}{n\frac{u}{2}} = e^{j(n-1)\frac{u}{2}} \text{sinc}\left(n\frac{u}{2}\right)$$

Nota:

- Evidentemente il termine esponenziale è un termine di fase che non concorre al calcolo della direttività dell'allineamento e scegliendo l'origine dell'asse z al centro dell'allineamento tale fattore esponenziale non comparirebbe.

5.4.a Esempi di allineamenti uniformi (rettilinei equidistanti)

➤ Allineamenti uniformi di 2, 3 e 4 elementi

- ❑ Abbiamo quindi dimostrato che il fattore di allineamento per allineamenti rettilinei, equidistanti, uniformi vale:

$$F_a(u) = \frac{1}{n} e^{j(n-1)\frac{u}{2}} \frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$$

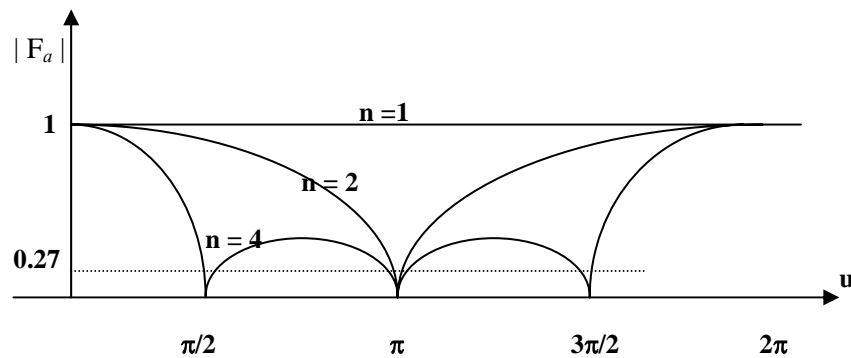
- Il modulo del fattore di allineamento per i casi di allineamenti uniformi con numero di elementi n uguale a 1, 2 e 4 e il valore della variabile di radiazione u_1 che determina il primo nullo nel fattore di allineamento sono:

$$n=1 \quad \rightarrow \quad |F_a|=1$$

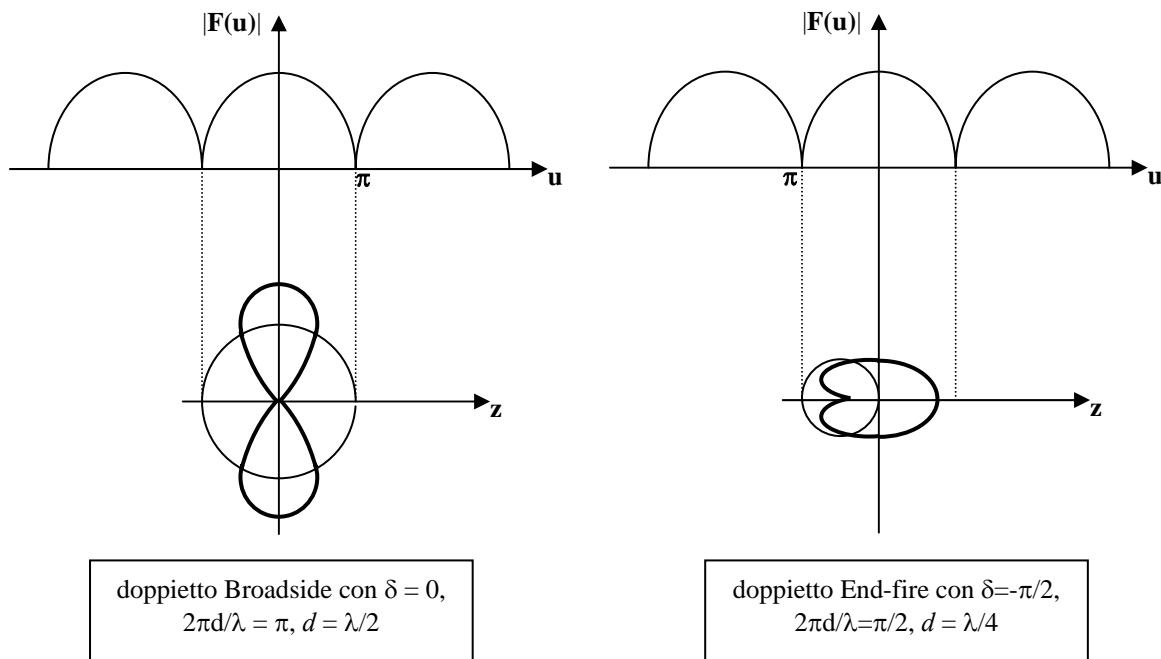
$$n=2 \quad \rightarrow \quad |F_a| = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{u}{2} + \frac{u}{2}\right)}{\sin \frac{u}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} + \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} = \cos \frac{u}{2} \quad ; \quad \frac{u_1}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u_1 = \pi$$

$$n=4 \quad \rightarrow \quad |F_a| = \frac{1}{4} \frac{\sin 2u}{\sin \frac{u}{2}} \quad ; \quad 2u_1 = \pi \Rightarrow u_1 = \frac{\pi}{2}$$

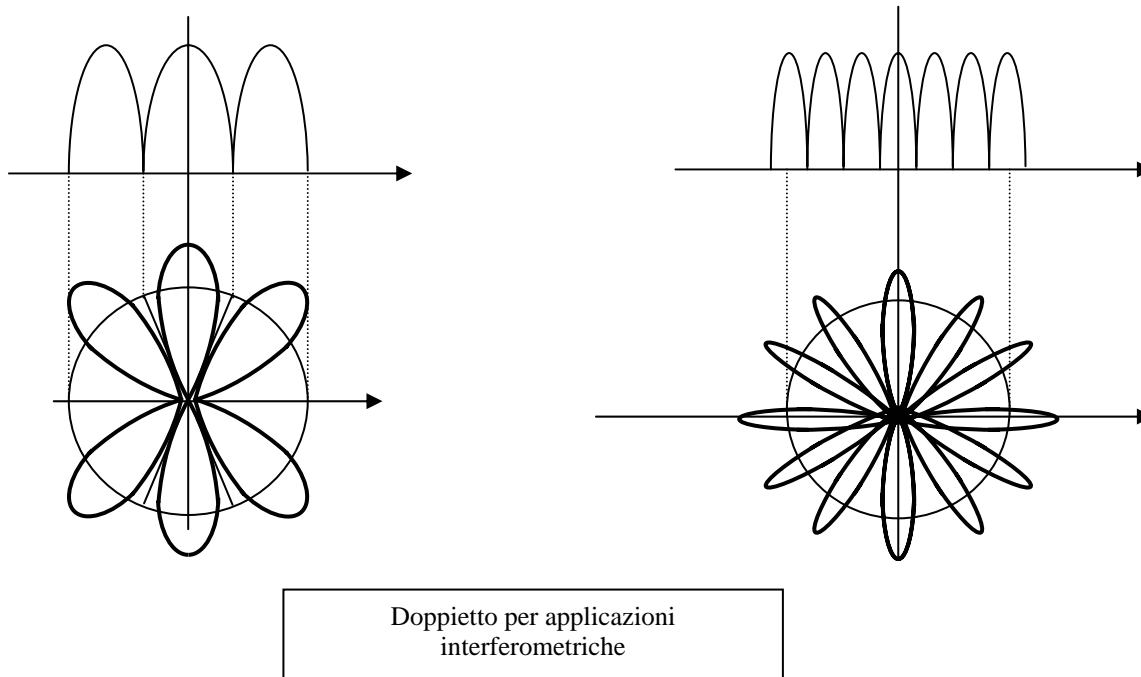
- Il grafico rappresenta il modulo di F_a in funzione della variabile di radiazione nei tre casi indicati ($n=1, 2$ e 4). Fissato il cerchio di visibilità, al crescere di n compaiono massimi relativi della funzione e quindi altrettanti massimi relativi nella direttività che entrano nel cerchio di visibilità. Essi determinano lobi secondari nel diagramma di radiazione simmetrici rispetto ai lobi principali, ovvero quello che si chiama anche fenomeno dello sfogliamento (*grating*).



➤ Doppietto ed interferometro



- ❑ Consideriamo un allineamento di due soli elementi (**doppietto**). I fattori di allineamento nei casi Broadside e End-fire sono disegnati nella figura precedente. Il caso Broadside è ottenuto con un raggio del cerchio di visibilità pari a π ovvero una distanza tra gli elementi pari a $d=\lambda/2$ e sfasamento $\delta=0$. Il caso End-fire si ottiene con $d=\lambda/4$ e sfasamento $\delta=-\pi/2$.
- ❑ Quando la dimensione d cresce vengono inclusi nel cerchio di visibilità diversi massimi assoluti della funzione $F_a(u)$ (fenomeno del grating già citato). Questo effetto può anche essere usato, ad esempio per realizzare antenne per applicazioni interferometriche come mostrato nella figura.



5.4.b Proprietà degli allineamenti uniformi (rettilinei equidistanti)

- ❑ Ricordiamo l'espressione del modulo di $F_a(u)$ per un allineamento rettilineo uniforme:

$$|F_a(u)| = \frac{1}{n} \frac{\sin n \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$$

- ❑ Nell'origine $u=0$ e nei punti $u/2$ multipli di π il modulo della funzione $F_a(u)$ è il limite di una forma del tipo $\sin(nx)/x$ per x che tende a zero o a π ed assume il valore massimo pari ad 1 (è stato ottenuto il fattore d'allineamento normalizzato grazie alla scelta di eccitazioni a_k in modulo pari a $1/n$).
- ❑ Cerchiamo l'angolo θ_M tra la direzione del massimo di $F_a(u)$ e l'asse z . Con riferimento al massimo di $F_a(u)$ per $u=0$, dalla condizione $u=0=k_0 d \cos \theta_M + \delta$ discende $\cos \theta_M = -\delta/k_0 d = -\delta \lambda / 2\pi d$ e il massimo si ottiene quando l'angolo θ_M è pari a:

$$\theta_M = \cos^{-1} \left[\frac{-\delta \lambda}{2\pi d} \right]$$

e si ritrova che il puntamento dell'allineamento dipende dallo sfasamento δ .

Cerchiamo le direzioni degli zeri di $F_a(u)$. Gli zeri di $F_a(u)$ sono quelli del numeratore ovvero quando $nu/2$ è multiplo di π ; quindi $n(k_0 d \cos \theta_i + \delta)/2 = \pm i\pi$ e da questo risulta $k_0 d \cos \theta_i = -\delta \pm 2i\pi/n$. Gli zeri di $F_a(u)$ si ottengono pertanto nelle direzioni θ_i rispetto a z pari a:

$$\theta_i = \cos^{-1} \left[\frac{\lambda}{2\pi d} \left(-\delta \pm \frac{2i}{n} \pi \right) \right] \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots; \quad i \neq n, 2n, 3n, \dots$$

- Per i multiplo di n ricadremmo nella condizione $u/2 = \pi$ in cui c'è un massimo. I massimi relativi si hanno approssimativamente quando è massimo il numeratore del fattore di allineamento ed il primo di essi soddisfa la condizione $nu_m/2 = 3\pi/2$ e $u_m = 3\pi/n$. Il corrispondente valore in modulo della $F_a(u_m)$ diviso per il valore massimo $|F_a(0)|=1$ fornisce il livello dei lobi laterali degli allineamenti rettilinei uniformi che vale quindi:

$$SLL \text{ }_{dB} = -20 \log n \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \cong +20 \log \frac{2}{3\pi} = -13.46 \text{ dB}$$

dove l'ultima equazione approssimata è valida per valori grandi di n .

- La direttività si può invece ricavare con la nota formula:

$$D_M = \frac{4\pi}{\Omega_P} = \frac{4\pi}{\int_{4\pi} U_n(\theta, \varphi) d\Omega}$$

dove il calcolo di Ω_P richiede l'integrazione di $U_n(\theta, \varphi) = U_{0n}(\theta, \varphi) |F_a(\theta, \varphi)|^2$, di risoluzione non immediata.

- Limitandoci per semplicità al caso di elementi isotropi, se il numero n è sufficientemente grande, si può dimostrare che la direttività di un allineamento Broadside è approssimata dalla seguente formula:

$$D_M \approx 2n \frac{d}{\lambda} = 2 \left(1 + \frac{L}{d} \right) \frac{d}{\lambda} \approx 2 \frac{L}{\lambda}$$

dove si è considerato che la lunghezza totale di un allineamento di n elementi distanti d vale $L=(n-1)d$, da cui $n=L/d+1$.

- Per allineamenti End-fire di elementi isotropi si ottiene un valore approssimato doppio rispetto a quello del Broadside:

$$D_M \approx 4n \frac{d}{\lambda} = 4 \left(1 + \frac{L}{d} \right) \frac{d}{\lambda} \approx 4 \frac{L}{\lambda}$$

Note:

- Il doppietto è utile per comprendere come le proprietà radiative siano determinate dal fenomeno dell'interferenza.
- Nel caso Broadside, se consideriamo un punto di osservazione a grande distanza nella direzione ortogonale all'asse z dell'allineamento, i percorsi dalle due sorgenti al punto di osservazione sono paralleli e di identica lunghezza. Essendo lo sfasamento dell'eccitazione nullo i campi elettromagnetici generati dai due elementi si comporranno pertanto con fase costruttiva. Se il punto di osservazione è invece sull'asse z , mentre le ampiezze dei due campi sono paragonabili (la distanza

d è piccola rispetto alla distanza dell'osservatore), è presente però uno sfasamento dovuto al diverso percorso e pari a $k_0 d = 2\pi d/\lambda$. Per un doppietto di dimensione $\lambda/2$ lo sfasamento è pari a π ed i due contributi al campo si annullano (sia per z positive che negative).

- Nel caso End-fire di dimensioni $\lambda/4$ invece, nella direzione delle z positive lo sfasamento del campo dovuto al diverso percorso è pari a $2\pi d/\lambda = \pi/2$ (campo prodotto dall'antenna di sinistra in ritardo) ma la fase dell'eccitazione dell'antenna di sinistra anticipata di $\pi/2$ compensa tale effetto e i due contributi di campo si compongono in maniera costruttiva determinando un massimo di radiazione. Nella direzione delle z negative invece si ottengono due contributi di campo questa volta sfasati di $\pi/2 + \pi/2 = \pi$, con conseguente presenza di un minimo nella radiazione dell'antenna.
- La condizione per un allineamento uniforme Broadside richiede il massimo di $F_a(u)$, ovvero lo zero di u , per $\theta = \pi/2$:

$$u = k_0 d \cos \theta + \delta \Big|_{\theta=\pi/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0$$

senza nessuna condizione su d , a parte il controllo del fenomeno di grating.

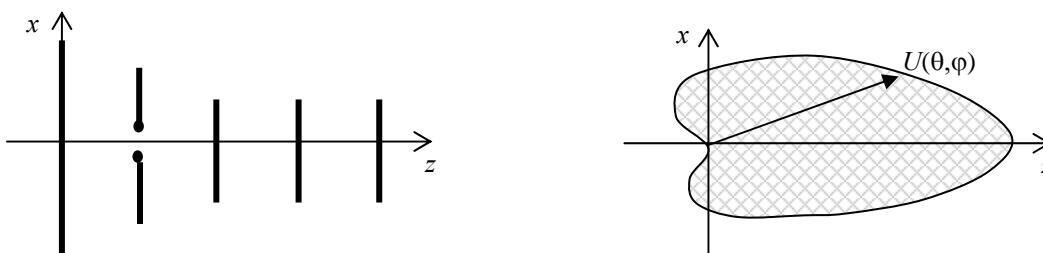
- La condizione di allineamento End-fire con massimo lungo le z positive (negative) richiede invece che lo zero di u si abbia per $\theta=0$ ($=\pi$) e quindi:

$$u = k_0 d \cos \theta + \delta \Big|_{\theta=0,\pi} = \pm kd + \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = \mp kd$$

La scelta di d anche in questo caso determinerà poi la presenza o meno di altri massimi relativi assoluti, come evidente dalla costruzione del cerchio di visibilità.

5.5 ALLINEAMENTI DI TIPO YAGI-UDA

- Le antenne **Yagi-Uda** sono allineamenti di tipo **End-fire** di dipoli rettilinei, di cui uno (solitamente un dipolo ripiegato risonante) è alimentato dal generatore, mentre gli altri non sono alimentati (**dipoli parassiti**) ma sono sedi di correnti indotte dovute all'accoppiamento con il dipolo alimentato o con altri elementi parassiti. Tale configurazione giustifica anche il nome di **pseudo-allineamento** o **allineamento parassita** dato a tale antenna, dove a rigore esiste solo una sorgente attiva.



I dipoli parassiti, sedi di correnti opportunamente sfasate, formano, insieme al dipolo alimentato, un allineamento End-fire che ha un massimo del fattore di allineamento $F_a(\theta, \varphi)$ nella direzione dell'allineamento stesso (asse z ovvero $\theta=0$).

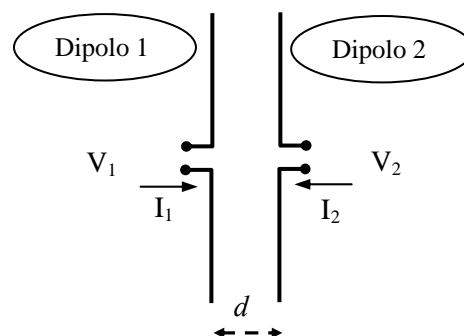
Sono antenne usate per la ricezione del segnale radiodiffuso e nelle applicazioni di compatibilità e.m. nelle bande HF (3-30 MHz), VHF (30-300 MHz) e UHF (300-3000 MHz). Valori tipici di direttività massima sono 7-15 dB, mentre il rapporto di banda è pari a 1.1-1.3 (antenna a banda stretta).

5.5.a Analisi approssimata delle correnti

- Consideriamo dapprima un doppietto costituito da dipoli a semionda paralleli. Definite le porte di ingresso/uscita delle due antenne (i morsetti dei dipoli) e le tensioni e correnti su esse, si identifica una rete due porte descritta dalla matrice delle impedenze \mathbf{Z} , secondo la seguente espressione:

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{Z}} \underline{\mathbf{I}}$$

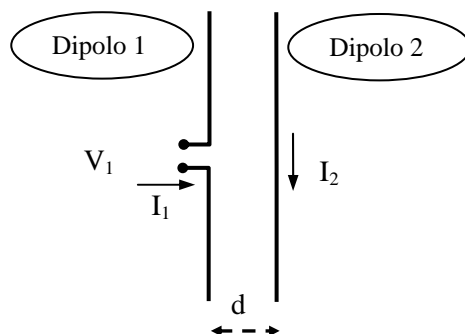
$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$



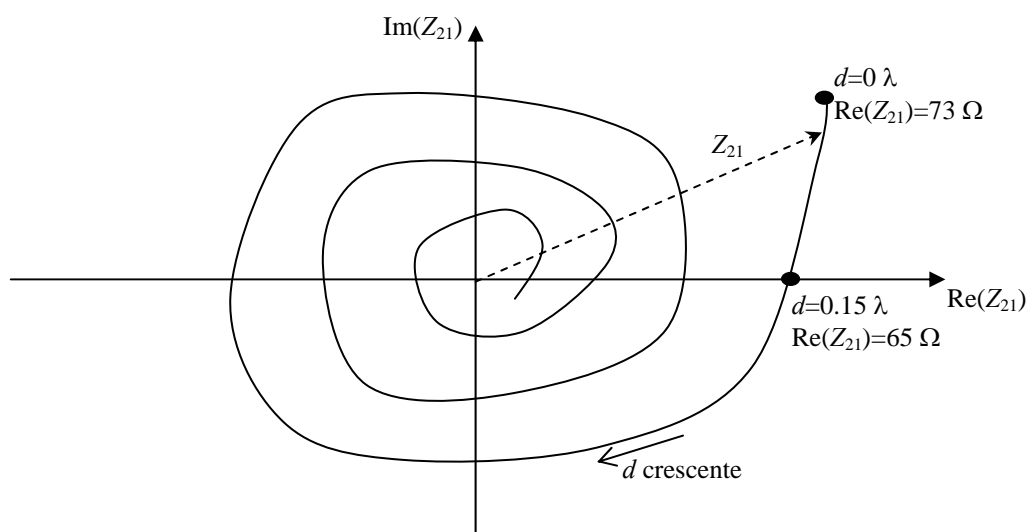
L'accoppiamento tra gli elementi del doppietto è caratterizzato dalle **transimpedenza**, o **impedenze mutue**, sussistendo la reciprocità, ovvero $Z_{12}=Z_{21}$. L'**impedenza mutua** è pari alla tensione su un elemento aperto quando sull'altro scorre una corrente unitaria. Essa dipende dalla lunghezza d'onda λ e dalla distanza tra i dipoli d .

- Se cortocircuitiamo il dipoli **2** (dipolo parassita) $V_2=0$. Scrivendo i termini della matrice impedenza nella forma $Z_{12}=|Z_{12}|\exp(j\varphi_{12})$ e $Z_{22}=|Z_{22}|\exp(j\varphi_{22})$, la corrente I_2 determinata dall'accoppiamento con il dipolo **1** alimentato vale:

$$I_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} I_1 = -\frac{|Z_{21}|}{|Z_{22}|} e^{j(\varphi_{21}-\varphi_{22})} I_1 = \frac{|Z_{21}|}{|Z_{22}|} e^{j(\pi+\varphi_{12}-\varphi_{22})} I_1$$



- ❑ Per dipoli a semionda, la parte resistiva di Z_{22} vale circa 73Ω . Quella reattiva è pari a zero ($\varphi_{22}=0$) se il dipolo è accordato ovvero è risonante. Evidentemente se il dipolo è più lungo $\varphi_{22}>0$, mentre se è più corto $\varphi_{22}<0$.
- ❑ Studiando il fenomeno di accoppiamento è possibile ricavare l'**impedenza mutua** Z_{21} . Si dimostra che con $d=0.15\lambda$ la fase φ_{21} è nulla mentre il modulo $|Z_{21}|$ vale circa 65Ω . La figura mostra la curva empirica (ricavata da misure sperimentali) del valore complesso di $Z_{21}=|Z_{21}|\exp(j\varphi_{21})=\text{Re}(Z_{21})+j\text{Im}(Z_{21})$ al variare della distanza d , parametro corrente della curva (per $d=0$ evidentemente si vede l'impedenza di 73Ω di un singolo dipolo, mentre per $d\rightarrow\infty$ l'impedenza mutua va a zero).



Pertanto, si può scrivere per $d=0.15\lambda$:

$$I_2 = \frac{|Z_{21}|}{|Z_{22}|} e^{j(\pi+\varphi_{12}-\varphi_{22})} I_1 = \frac{65}{73} e^{j(\pi-\varphi_{22})} I_1$$

5.5.b Analisi approssimata del diagramma di radiazione

- ❑ Dall'equazione precedente, se il dipolo parassita 2 è accordato ($\varphi_{22}=0$) la corrente I_2 che in esso circola è in opposizione di fase rispetto a quella nel dipolo alimentato I_1 , ovvero lo sfasamento tra gli elementi del **doppio** vale $\delta=\pi$ mentre la distanza è $d=0.15\lambda$.
- ❑ Il cerchio di visibilità ha raggio $k_0d=2\pi d/\lambda=2\pi \cdot 0.15=0.3\pi$ e dalla costruzione in figura si ottiene un fattore di allineamento di tipo End-fire con massimi sull'asse z nei versi sia positivo che negativo.

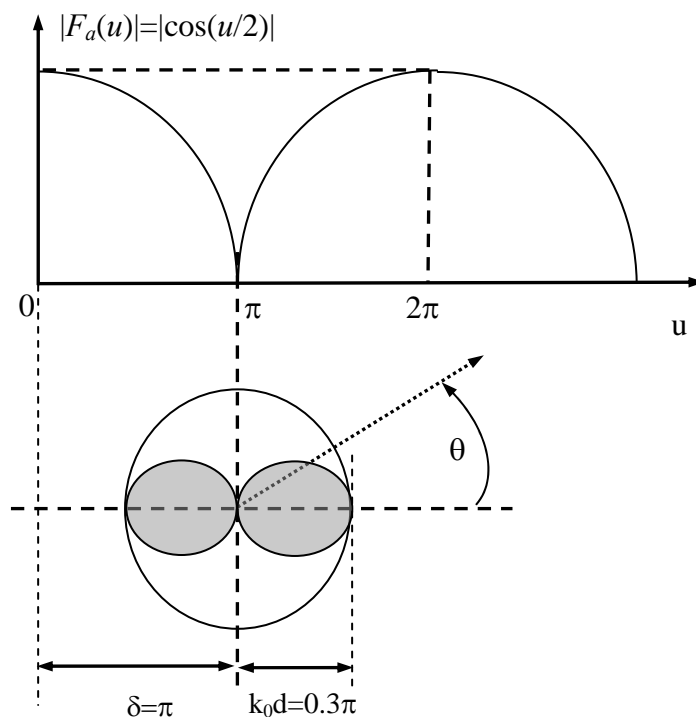


Figura: caso di dipolo parassita risonante ($\varphi_{22}=0$)

- Per ottenere un'antenna **monodirezionale** è possibile disaccordare il dipolo passivo rispetto al caso in cui risulta $\varphi_{22}=0$ ottenendo uno sfasamento tra i due elementi pari a $\delta=\pi-\varphi_{22}$ diverso a seconda se il dipolo è più lungo del caso accordato (Z_{22} induttiva e $\varphi_{22}>0$) o più corto (Z_{22} capacitiva e $\varphi_{22}<0$). Ripetendo la costruzione grafica in questi due casi si vede come:

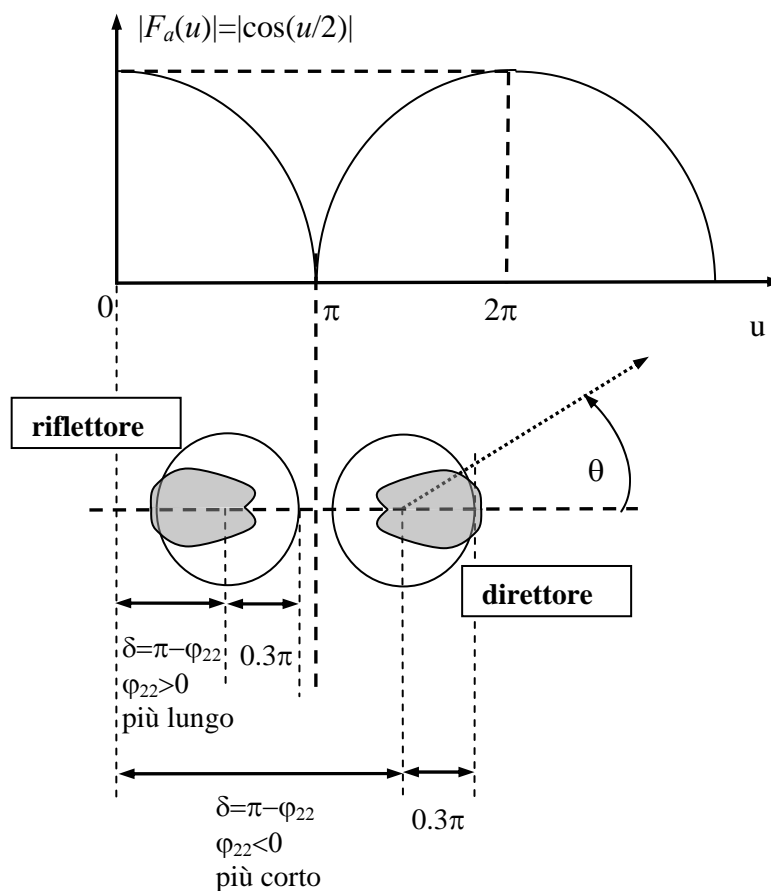


Figura: caso di dipoli parassiti non accordati ($\varphi_{22}<0$ oppure $\varphi_{22}>0$)

1. Il dipolo parassita più lungo determina un massimo del fattore di allineamento diretto verso le z negative (ovvero dalla parte del dipolo alimentato). Esso si comporta in altre parole come un **riflettore**.
 2. Il dipolo parassita più corto determina un massimo del fattore di allineamento verso le z positive (ovvero dalla parte opposta al dipolo alimentato). Esso si comporta in altre parole come un **direttore**.
- Il diagramma di radiazione, espresso dalla funzione intensità di radiazione, che si ottiene combinando un dipolo riflettore e più dipoli direttori è rappresentato in figura.

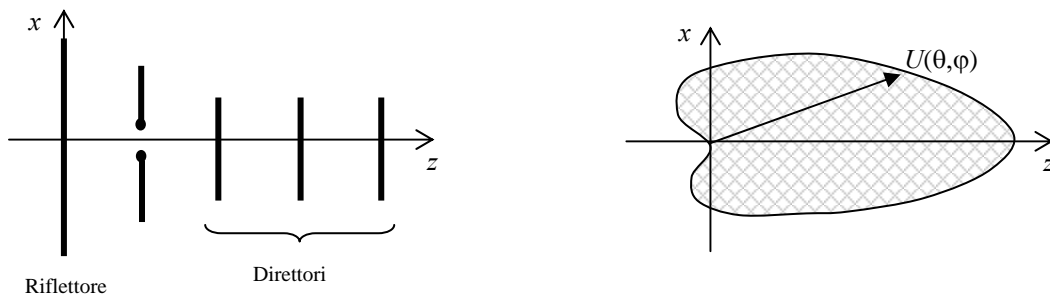


Figura: struttura schematica di un'antenna Yagi-Uda e suo diagramma di radiazione

- L'**antenna Yagi_Uda** è costruttivamente costituita (vedi figura) da un dipolo alimentato (di solito un dipolo ripiegato), un dipolo parassita riflettore (più lungo) ed un certo numero di dipoli parassiti direttori (più corti). La direttività è massima nella direzione dell'allineamento. Al crescere del numero di elementi la direttività aumentare per poi saturare (oltre 10 direttori circa) in quanto le impedenze mutue diminuiscono al crescere delle distanze.

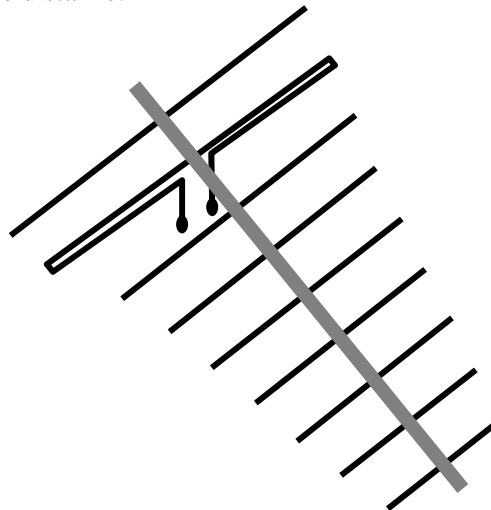


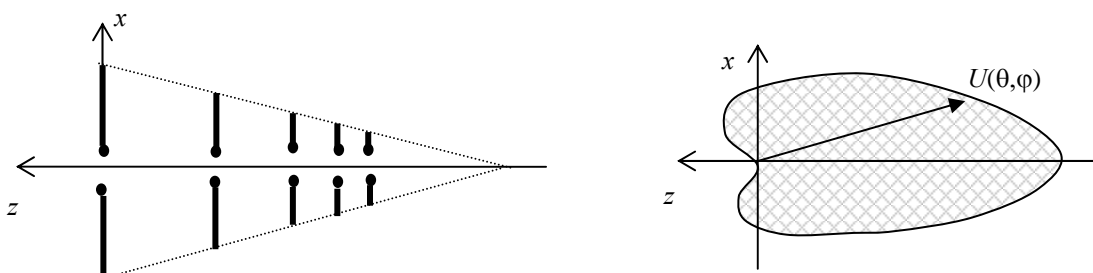
Figura: Esempio di struttura reale di un'antenna Yagi-Uda con elemento attivo costituito da un dipolo ripiegato a $\lambda/2$ alimentato in maniera bilanciata e connesso al supporto (massa) nel punto centrale

Nota:

- Il **progetto** di un'antenna Yagi-Uda è basata su procedure empiriche, di cui la più nota è quella proposta da P.P. Vezbicke nel 1968. In tale procedura, assegnata la direttività massima e la frequenza centrale unitamente al diametro dei dipoli parassiti e del supporto metallico, si ricavano le distanze tra i dipoli, le loro lunghezze e la lunghezza totale dell'allineamento. Si noti che la distanza tra dipolo riflettore e dipolo ripiegato è diversa che tra dipolo ripiegato e dipoli direttori.

5.6 ALLINEAMENTI DI TIPO LOG-PERIODICO

- L'antenna **Log-periodica a dipoli (convenzionale)**, proposta da D.E. Isbell nel 1960, è costituita da un allineamento di dipoli rettilinei distanziati in modo non-uniforme (logaritmico) e alimentati in controfase a coppie. La struttura e la disposizione dei dipoli è detta *auto-scalante*: tale proprietà consente di ottenere una elevata larghezza di banda (teoricamente infinita per strutture infinitamente lunghe; nella realtà fino ad una decade in frequenza ovvero indici di banda r_f da 10 a 20).



- Il principio base è che una struttura che si espande gradualmente soddisfa alle condizioni per irradiare in maniera ottimale radiazione a determinate frequenze almeno in una sua porzione. Tale porzione “migra” lungo l'antenna al variare della frequenza di lavoro. Nell'antenna Log-periodica la porzione interessata è costituita da 5-6 dipoli vicini alla condizione di risonanza a $\lambda/2$. Il diagramma di radiazione punta nella direzione degli elementi più corti che risultano peraltro gli elementi vicini al generatore.
- Apparentemente la struttura dell'antenna log-periodica risulta **simile a quella Yagi-Uda**. Tuttavia, ne differisce per la spaziatura non-uniforme dei dipoli e, soprattutto, per il fatto che sono tutti alimentati.
- Sono antenne **usate** per la ricezione del segnale televisivo e nelle applicazioni di compatibilità e.m. nelle bande VHF (30-300 MHz) e UHF (300-3000 MHz). Valori tipici di direttività massima sono 7-12 dB, mentre il rapporto di banda è pari a 10-20 (*antenna a banda larga*).

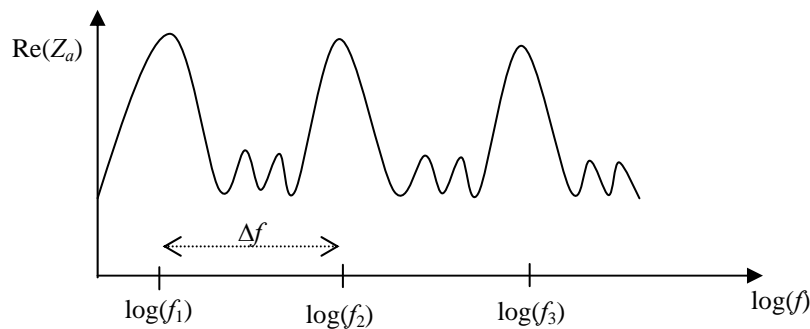
5.6.a Antenne frequenza-indipendenti

- L'antenna Log-periodica a dipoli (convenzionale) appartiene alla classe delle **antenne frequenza-indipendenti**, i cui fondamenti furono posti da V.H. Rumsey nel 1957. In quest'ultima classe di antenne si possono anche elencare:
 1. antenne a spirale equiangolari filiformi;
 2. antenne a spirale equiangolari metalliche piane;
 3. antenne a spirale equiangolari piane a fessura (in un piano metallico);
 4. antenne a spirale conica;
 5. antenna log-periodica planare a zig-zag e a dente di sega trapezoidale;
 6. antenna log-periodica filiforme a zig-zag e a dente di sega trapezoidale.
- Ricordiamo la proprietà di similitudine, per cui se una struttura ha certe proprietà alla frequenza f_1 (lunghezza d'onda λ_1) e scaliamo tutte le sue dimensioni dividendole per un fattore τ , essa avrà le stesse proprietà alla frequenza $f_2 = \tau f_1$ ($\lambda_2 = \lambda_1 / \tau$). Una struttura si dice **auto-scalante** se, dividendo tutte le sue dimensioni per un fattore τ , essa si trasforma in se stessa. In tal caso tale struttura avrà le medesime proprietà ogni volta dalla frequenza f_1 si passi alla frequenza $f_2 = \tau f_1$ ($\lambda_2 = \lambda_1 / \tau$), oppure $f_3 = \tau^2 f_1$ ($\lambda_3 = \lambda_1 / \tau^2$) ed in genere $f_n = \tau^{n-1} f_1$ ($\lambda_n = \lambda_1 / \tau^{n-1}$). Questa proprietà (**auto-scalante**) è alla base delle antenne **frequenza-indipendenti** precedentemente citate, le cui caratteristiche si ripetono periodicamente ed indefinitamente con la frequenza.

Il periodo Δf di ogni ciclo è definito nel logaritmo della frequenza ed è dettato dal **rapporto geometrico** τ , definito come:

$$\tau = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_n}{f_{n-1}} \Rightarrow \Delta f = \log(f_2) - \log(f_1) = \log(f_n) - \log(f_{n-1}) = \log\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

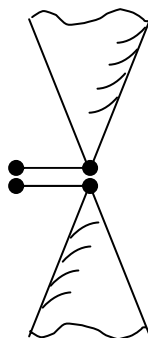
Un tipico andamento della **resistenza di ingresso** R_a di un'antenna frequenza indipendente è il seguente:



- La periodicità delle variazioni dei parametri d'antenna rispetto al logaritmo della frequenza (con periodo Δf) giustifica il nome di antenne **Log-periodiche** dato a queste strutture. La proprietà auto-scalante richiede strutture illimitate. Nei casi reali il troncamento ha effetto limitato sulla banda solo quando le correnti diminuiscono sensibilmente lungo la struttura. La **banda effettiva** B di frequenze di lavoro sarà comunque determinata dalle dimensioni finite della struttura reale e dalle tolleranze sulle variazioni dei parametri d'antenna (e.g., di Z_a) ritenute accettabili.

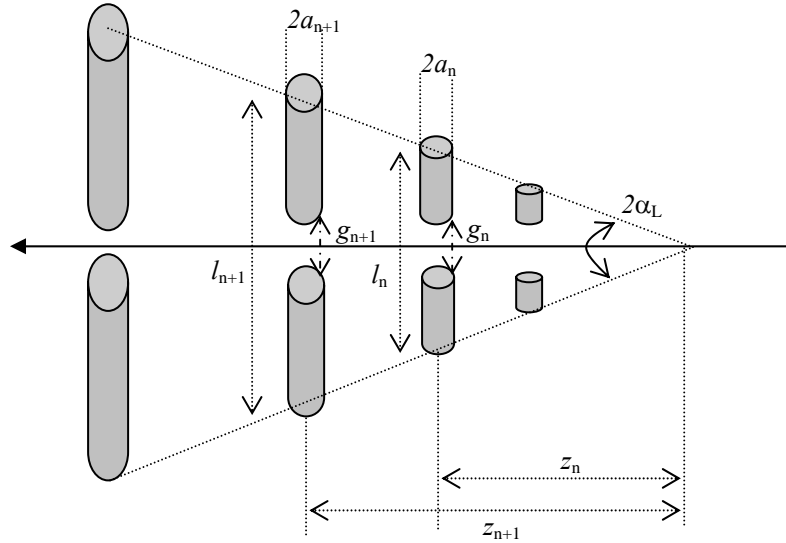
Note:

- Una struttura auto-scalante qualunque sia il rapporto geometrico avrebbe proprietà rigorosamente costanti ed indipendenti dalla frequenza. Tale condizione si può ottenere con strutture la cui geometria sia specificata solo in termini di coordinate angolari. Un esempio è fornito da un'antenna costituita da due coni (infiniti) allineati lungo un asse e contrapposti ai vertici ove l'antenna viene alimentata (antenna biconica). Il troncamento nel caso di antenne biconiche reali limita la banda a causa delle riflessioni alla estremità troncata.



5.6.b Analisi dell'antenna log-periodica dipolare

- Si consideri l'allineamento log-periodico di dipoli rettilinei in figura, teoricamente di lunghezza infinita. Con riferimento all' n -mo dipolo, siano l_n la sua lunghezza, a_n il raggio, g_n lo spazio (gap) tra i morsetti di alimentazione e z_n la distanza dal vertice. L'asse z è assunto con verso uscente dal generatore, assunto idealmente al vertice della struttura.



- Tra le variabili geometriche definite valga la seguente relazione:

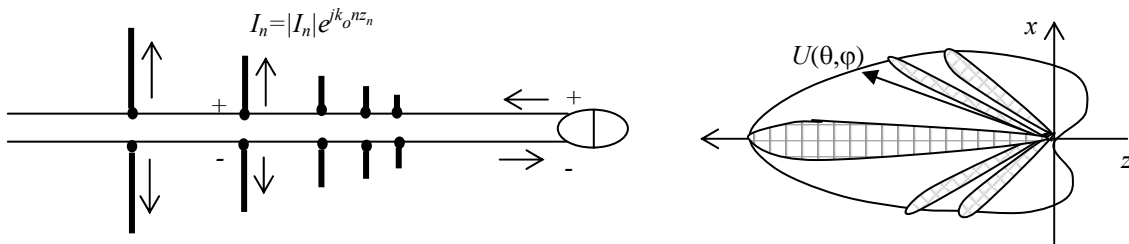
$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{1}{\tau}$$

ove τ è il **rapporto geometrico**. Tale relazione determina la proprietà auto-scalante della struttura (moltiplicando tutte le sue dimensioni per τ si riottiene la medesima struttura, con l'elemento n che diventa uguale all'elemento $n-1$). L'allineamento è completamente definito da τ e da uno dei due seguenti parametri σ (**fattore di spaziatura**) o α (**semi-angolo di divergenza**):

$$\sigma = \frac{z_{n+1} - z_n}{2l_{n+1}} = \frac{\Delta z_n}{2l_{n+1}}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{l_n}{2z_n}\right)$$

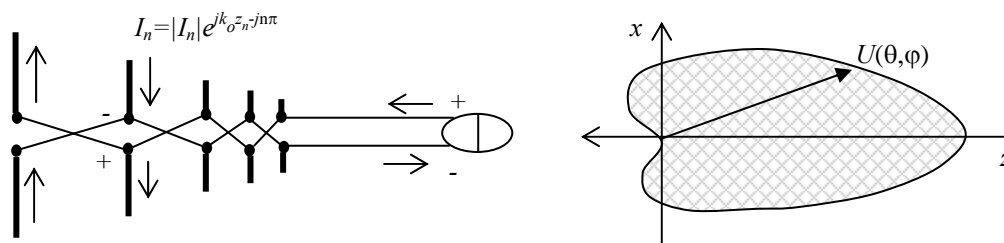
Essendo molto complicato (e costoso) realizzare strutture con fili o tubi di diametro poco differente e spaziature tra dipolo con basse tolleranze, si assumono tali caratteristiche geometriche costanti (ovvero, $a_n = a_{n+1}$ e $g_n = g_{n+1}$). Tali scelte non modificano, in genere, le prestazioni dell'antenne essendo riferite a fattori minori.

- L'**alimentazione** dell'antenna logaritmica dipolare è realizzata da una linea di trasmissione (mediante linee bifilari o cavo coassiale), con generatore posto vicino al dipolo più corto, in cui si propaga un'onda progressiva. Tale alimentazione introduce tra i dipoli uno sfasamento pari a $k_l \Delta z_n$, dove $k_l = 2\pi/\lambda_l$ è la costante di propagazione della linea e Δz_n la spaziatura tra i dipoli. Le connessioni della linea vengono incrociate in modo alterno in ogni dipolo in modo da introdurre un ulteriore sfasamento di π .



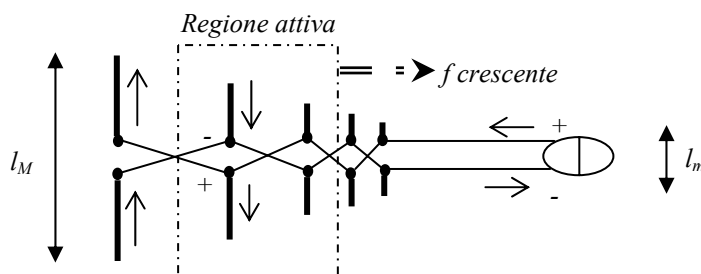
- Nel **caso di linea non incrociata** si ha la situazione in figura, in cui la corrente (complessa) su ciascun dipolo ha ampiezza $|I_n|$ e sfasamento tra dipoli pari a $\delta = k_l \Delta z_n$. Consideriamo in prima approssimazione la teoria degli allineamenti uniformi equidistanti (la regione attiva dell'antenna logaritmica è costituita da 5-6 elementi) e $k_l = k_0$ (si veda sezione 5.3c). Tale distribuzione delle

alimentazioni a sfasamento lineare progressivo di valore *positivo* pari a $\delta = 2\pi\Delta z_n/\lambda$, pari al raggio del cerchio di visibilità, produce un fattore di allineamento di tipo End-fire con puntamento nel verso positivo dell'asse z (dai dipoli corti verso quelli lunghi), qualunque sia Δz_n . Il fattore di allineamento per un allineamento uniforme con numero N ($\approx 5-6$) di sorgenti primarie è caratterizzato da rilevanti effetti di sfogliamento (*grating*) dovuti alle interferenze tra i dipoli. In figura sopra è mostrato un esempio qualitativo.



- Nel **caso di linea incrociata**, si crea un'ulteriore sfasamento di π tra le correnti di alimentazione di dipoli adiacenti, ovvero $\delta = k_l \Delta z_n - \pi$. I dipoli *molto vicini* (**regione dei dipoli corti**) hanno comportamento reattivo di tipo capacitivo; essi risultano poco adattati e inoltre le correnti sono quasi uguali e opposte (sfasamento di circa π) per cui l'energia irradiata è ridotta. I *dipoli più lunghi e distanti* di lunghezza vicina a quella di dipoli risonanti a $\lambda/2$ (**regione attiva**) presentano impedenza inferiore e quindi corrente assorbita maggiore. Essi irradiano sensibilmente e lo sfasamento δ è tale da produrre un allineamento End-fire con puntamento all'indietro nel verso negativo dell'asse z (dai dipoli lunghi verso quelli corti, ovvero onda viaggiante regressiva rispetto al generatore). La corrente nella linea si riduce poi sensibilmente oltre la regione attiva ed i dipoli ancora più lunghi e non adattati (comportamento induttivo) non irradiano sensibilmente.

- Un'antenna log-periodica a **banda di frequenza** illimitata dovrebbe essere un allineamento di dimensione infinita. La finitezza della struttura detta condizioni sulla *larghezza di banda* B . Quest'ultima è determinata dalla lunghezza elettrica dell'elemento della struttura più lungo e più corto.



Se $B = f_s/f_i$ con f_s frequenza superiore e f_i frequenza inferiore, la **frequenza inferiore** f_i corrisponde al valore per cui la lunghezza l_M del dipolo più lungo è pari a $\lambda/2$, ovvero (se c è la velocità della luce nel vuoto):

$$f_i = \frac{c}{\lambda_i} = \frac{c}{2l_M}$$

Corrispondentemente, la **frequenza superiore** si ottiene in relazione alla lunghezza l_m del dipolo più corto mediante:

$$f_s \geq \frac{c}{\lambda_s} = \frac{c}{2l_m}$$

In realtà, f_s è sempre maggiore essendo uguale all'estremo solo nel caso di bande strette.

- La **regione attiva** si sposta dai dipoli più lunghi verso quelli più corti all'aumentare della frequenza di lavoro. Geometricamente essa soddisfa alla condizione autoscalante per cui le proprietà radianti si conservano con la frequenza. Si noti che l'energia viaggiante dalla regione attiva verso gli elementi

radianti più lunghi inattivi decresce rapidamente per cui le riflessioni dovute al troncamento della struttura sono trascurabili (presenza della sola onde progressiva). Lo spostamento della regione attiva, e quindi del centro di fase dell'antenna, rende l'antenna log-periodica **inadatta all'uso come illuminatore** di antenne a riflettore o a lente.

Note:

- A titolo esemplificativo si osservi come la condizione di End-fire all'indietro, che si realizza nelle antenne Log-periodiche, si ottiene alimentando un allineamento equidistante uniforme con spaziatura $\Delta z = d = \lambda/4$ con un'onda progressiva che viaggia alla velocità della luce c (ovvero $k_1 = k_0$) e linea incrociata. In tal caso lo sfasamento tra gli elementi risulta:

$$\delta = kd - \pi = (2\pi/\lambda)(\lambda/4) - \pi = \pi/2 - \pi = -\pi/2$$

ed è pari al raggio del cerchio di visibilità $kd = (2\pi/\lambda)(\lambda/4) = \pi/2$

- Tipici **progetti di antenne log-periodiche** dipolari hanno i valori seguenti dei parametri:

$$10^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \quad \text{e} \quad 0.95 \leq \tau \leq 0.7$$

Si noti che esiste, in realtà, una relazione inversa tra α e τ . Una relazione semi-empirica, proposta da Carrell nel 1961 e tuttora utilizzata, è la seguente:

$$\alpha = \operatorname{artg}\left(\frac{1-\tau}{4\sigma}\right)$$

Piccoli valori di α , ovvero grandi valori di τ , richiedono un elevato numero di elementi da disporre più vicini tra loro. Tale scelta è ottima se si vuole aumentare il numero di elementi nella regione attiva ottenendo, come vantaggio, una minore variazione delle prestazioni con la frequenza (a causa di una più regolare transizione tra gli elementi) e maggiori guadagni.

A titolo di **esempio**, si riportano valori tipici della resistenza di ingresso R_a e della direttività massima D_M al variare di α e τ :

- per $\alpha=10^\circ$ e $\tau_L=0.89$, $R_a=82 \Omega$ e $D_M=9.8$ dBi;
- per $\alpha=45^\circ$ e $\tau_L=0.89$, $R_a=59 \Omega$ e $D_M=6.2$ dBi.