

## 2. RADIAZIONE ELETTROMAGNETICA

### 2.1 EQUAZIONI DI MAXWELL NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

#### 2.1.a Notazione complessa

##### ➤ Vettore complesso

Notazione complessa vettoriale utilizzata per rappresentare campi vettoriali le cui componenti variano armonicamente (cosinusoidalmente) nel tempo a pulsazione  $\omega_0$  [rad]:

$$\underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{r}}, t) \equiv \text{Re}\{ \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega_0) e^{+j\omega_0 t} \} = \text{Re}\{ [\underline{\mathbf{E}}_R(\underline{\mathbf{r}}, \omega_0) + j\underline{\mathbf{E}}_J(\underline{\mathbf{r}}, \omega_0)] e^{+j\omega_0 t} \}$$

ove  $\underline{\mathbf{r}}$  è il vettore posizione,  $\underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{r}}, t)$  è il vettore istantaneo nel dominio del tempo e  $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega_0)$  è il vettore complesso rappresentativo nel dominio della frequenza.

##### ➤ Trasformata di Fourier

Metodo di trasformazione utilizzato per rappresentare campi vettoriali (sommabili, ovvero a energia finita) le cui componenti variano in modo qualsiasi nel tempo:

$$\underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{r}}, t) \supset \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega) \text{ tale che } \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{r}}, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega) e^{+j\omega t} d\omega \quad \& \quad \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega) = \mathfrak{F}\{ \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{r}}, t) \} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{r}}, t) e^{-j\omega t} dt$$

ove  $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega)$  rappresenta la trasformata di Fourier (vettoriale) del campo istantaneo, essendo  $\mathfrak{F}$  l'operatore trasformata e  $\mathfrak{F}^{-1}$  l'operatore anti-trasformata.

##### Note

- Se  $\underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{r}}, t)$  rappresenta un campo elettrico [V/m], allora  $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega_0)$  ha dimensioni [V/m], mentre  $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega)$  ha dimensioni [V/ m Hz] essendo una componente spettrale.
- Nel seguito indicheremo *indifferentemente con*  $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$  sia il vettore complesso  $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega_0)$  che il vettore trasformato  $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega)$ , distinguendo le due rappresentazioni quando necessario.
- Analogamente possiamo considerare la trasformata rispetto alle variabili spaziali. Con riferimento a  $x$  e alla relativa variabile trasformata  $k_x$  (o *frequenza spaziale*) si ha:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega) \supset \underline{\mathbf{E}}_{k_x}(k_x, y, z; \omega) \text{ tale che } \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{E}}_{k_x}(k_x, y, z, \omega) e^{-jk_x x} dk_x$$

ove si noti la diversa convenzione sul segno dell'esponente del nucleo di integrazione. Analoghe trasformazioni possono essere effettuate rispetto alle coordinate  $y$  e  $z$ , ovvero rispetto a una coppia di coordinate (vedi Spettro di onde piane).

## 2.1.b Equazioni di Maxwell

In forma differenziale, le eq. di Maxwell nel dominio della frequenza assumono la seguente forma:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}) & \text{Eq. di Faraday (I eq. di Maxwell)} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = j\omega \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{r}}) + \underline{\mathbf{J}}_c(\underline{\mathbf{r}}) + \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}) & \text{Eq. di Ampere-Maxwell (II eq. di Maxwell)} \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega \rho(\underline{\mathbf{r}}) & \text{Eq. di continuità della corrente elettrica} \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega \rho_m(\underline{\mathbf{r}}) & \text{Eq. di continuità della corrente magnetica} \end{cases}$$

dove

$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$ : campo elettrico [V/m]	$\underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{r}})$ : campo induzione elettrica [C/m <sup>2</sup> ]
$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}})$ : campo magnetico [A/m]	$\underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{r}})$ : campo induzione magnetica [Wb/m <sup>2</sup> ]
$\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}})$ : densità di corrente elettrica [A/m <sup>2</sup> ]	$\underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}})$ : densità di pseudo-corrente magnetica [V/m <sup>2</sup> ]
$\underline{\mathbf{J}}_c(\underline{\mathbf{r}})$ : densità di corrente di conduzione [A/m <sup>2</sup> ]	
$\rho(\underline{\mathbf{r}})$ : densità di carica elettrica [C/m <sup>3</sup> ]	$\rho_m(\underline{\mathbf{r}})$ : densità di pseudo-carica magnetica [Wb/m <sup>3</sup> ]

Note

- Dalle eq. di Maxwell applicando la divergenza alla II equazione, essendo nulla la divergenza di un rotore, si ottiene:

$$j\omega \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{r}}) = -\nabla \cdot [\underline{\mathbf{J}}_c(\underline{\mathbf{r}}) + \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}})] = +j\omega \rho(\underline{\mathbf{r}})$$

dove si è applicata l'eq. di continuità della densità di corrente totale (conduzione + impressa). Da cui:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{r}}) = \rho(\underline{\mathbf{r}}) \quad \text{eq. di Gauss}$$

- Le sorgenti impresse sono rappresentate dalle densità di corrente  $\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}})$  e  $\underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}})$ , che come vedremo possono essere classificate come:
  - a) **indotte**, quando dovute ad altre sorgenti e.m.;
  - b) **equivalenti**, quando rappresentano sorgenti matematiche che schematizzano condizioni al contorno;
  - c) **esterne**, quando originate da processi di trasformazione da altre forme di energia
- Come noto, le  $\underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}})$  e  $\rho_m(\underline{\mathbf{r}})$  sono sorgenti fittizie, che non esistono fisicamente (o, come suol dirsi, fisicamente nulle), introdotte al puro scopo di rendere le equazioni Maxwell duali (vedi *teorema di dualità* nel seguito).
- Si noti che nel seguito, ove possibile e non ambiguo, si ometterà la dipendenza dei campi dal vettore osservazione (posizione)  $\underline{\mathbf{r}}$ .

## 2.1.c Relazioni costitutive

*Ipotesi:*

- mezzo lineare, omogeneo, causale, stazionario, isotropo, **dispersivo elettricamente nel tempo**, non dispersivo nello spazio e dissipativo dielettricamente e per conduzione
- dominio della frequenza

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{r}}) = \varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \varepsilon_o\varepsilon_r(\omega)\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \varepsilon_o[\varepsilon_r'(\omega) - j\varepsilon_r''(\omega)]\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{r}}) = \mu\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = \mu_o\mu_r\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \underline{\mathbf{J}}_c(\underline{\mathbf{r}}) = \sigma\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \end{cases}$$

- ove
- $\varepsilon(\omega)$ : costante dielettrica complessa [F/m] tale che  $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$
  - $\varepsilon_o$ : costante dielettrica del vuoto [ $\varepsilon_o = (1/36 \pi) 10^{-9}$  F/m]
  - $\varepsilon_r(\omega)$ : costante dielettrica relativa complessa [adim], dovuta a polarizzazioni del mezzo
  - $\varepsilon_r'(\omega)$ : parte reale della costante dielettrica relativa complessa  $\varepsilon_r$
  - $\varepsilon_r''(\omega)$ : parte immaginaria della costante dielettrica relativa  $\varepsilon_r$
  - $\mu$ : permeabilità magnetica [H/m] tale che  $\mu = \mu_o \mu_r$
  - $\mu_o$ : permeabilità magnetica del vuoto [ $\mu_o = 4 \pi 10^{-9}$  H/m]
  - $\mu_r$ : permeabilità magnetica relativa [adim]
  - $\sigma$ : conducibilità [S/m]

*Note*

- In un mezzo **dispersivo elettricamente nel tempo**, la relazione costitutiva è una convoluzione nel dominio del tempo:

$$\underline{\tilde{\mathbf{D}}}(\underline{\mathbf{r}}, t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t-t')\underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{r}}, t')dt' \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega) = \varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega)$$

dove, per le proprietà della trasf. di Fourier, la convoluzione nel tempo è uguale al prodotto delle trasformate.

- Le quantità  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  vengono dette **costanti primarie** del mezzo. In un mezzo *non dispersivo temporalmente*, le costanti primarie sono reali e non dipendono dalla pulsazione  $\omega$ . In un mezzo *disomogeneo* (spazialmente) le costanti primarie dipenderanno anche dal punto, ovvero da  $\underline{\mathbf{r}}$ .
- Le **costanti secondarie** sono definite come segue:

$$\begin{aligned} k &\equiv \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} && \text{costante di propagazione complessa [1/m]} \\ \eta &\equiv \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} && \text{impedenza caratteristica complessa del mezzo [\Omega]} \end{aligned}$$

con  $\beta$  [1/m] costante di fase e  $\alpha$  [1/m] costante di attenuazione, essendo inoltre:

$$\varepsilon_c \equiv \varepsilon_c' - j\varepsilon_c'' = \varepsilon_o\varepsilon_{rc} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_o\varepsilon_r' - j\frac{\sigma + \omega\varepsilon_o\varepsilon_r''}{\omega} \quad \text{costante dielettrica equivalente [F/m]}$$

- Nel **vuoto** si ha:

$$k = \beta = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o} = \frac{2\pi}{\lambda_o} \equiv k_o \quad \text{e} \quad \eta \equiv \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 377 \Omega \equiv \eta_o$$

con  $\lambda_o$  la lunghezza d'onda nel vuoto.

- Un altro parametro del mezzo di interesse nelle applicazioni è l'**indice di rifrazione**:

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon_c}{\mu_o \epsilon_o}} = n' - jn'' \quad \text{indice di rifrazione [adim]}$$

con  $v$  velocità della luce nel mezzo. Per mezzi non-ferromagnetici ( $\mu = \mu_o$ ), si ha:

$$n = \sqrt{\epsilon_{rc}} \quad \text{indice di rifrazione [adim]}$$

che per non dissipativi diventa:  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ .

### ➤ Equazioni di Maxwell nel mezzo

Sostituendo nelle eq. di Maxwell le relazioni costitutive relative a mezzo lineare, omogeneo, causale, stazionario, isotropo, **dispersivo elettricamente nel tempo**, non dispersivo nello spazio e dissipativo dielettricamente e per conduzione, si ha:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}) \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = j\omega\epsilon_c\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) + \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\rho(\underline{\mathbf{r}}) \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\rho_m(\underline{\mathbf{r}}) \end{cases}$$

che costituiscono un sistema di equazioni determinato di 8 equazioni (2 vettoriali + 2 scalari) in 8 incognite (3 componenti di  $\underline{\mathbf{E}}$ , 3 componenti di  $\underline{\mathbf{H}}$ ,  $\rho$  e  $\rho_m$ ).

## 2.2 RICHIAMI DI ELETTROMAGNETISMO

### 2.2.a Teorema di unicità

#### ➤ Problemi interni

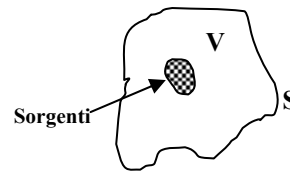
Condizione sufficiente a che la soluzione sia unica all'interno di un volume  $V$  delimitato da una superficie chiusa  $S$ , riempito da un mezzo dissipativo e sede di sorgenti impresse, è che siano assegnate su  $S$  le componenti tangenziali dei campi:

$$\underline{n}_0 \times \underline{E}(\underline{r}) \quad \text{oppure} \quad \underline{n}_0 \times \underline{H}(\underline{r}) \quad \text{su } S$$

dove  $\underline{n}_0$  è la normale uscente a  $S$ . Oppure, se  $S=S' \cup S''$ , l'unicità della soluzione sussiste se sono assegnate:

$$\underline{n}_0 \times \underline{E}(\underline{r}) \quad \text{su } S' \quad \text{insieme a} \quad \underline{n}_0 \times \underline{H}(\underline{r}) \quad \text{su } S''$$

o viceversa.



#### ➤ Problemi esterni

Siano assegnate le sorgenti impresse in un volume  $V$  illimitato, ovvero delimitato dalla superficie interna  $S$  e dalla superficie all'infinito. La condizione sufficiente per la unicità della soluzione in  $V$  è che siano assegnate le condizioni al contorno su  $S$  (vedi sopra):

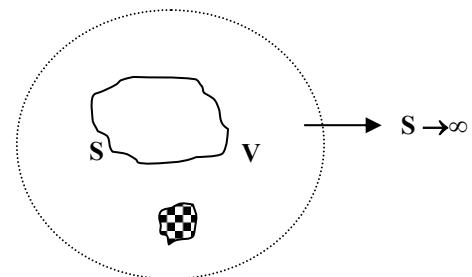
$$\underline{n}_0 \times \underline{E}(\underline{r}) \quad \text{oppure} \quad \underline{n}_0 \times \underline{H}(\underline{r}) \quad \text{su } S$$

oppure

$$\underline{n}_0 \times \underline{E}(\underline{r}) \quad \text{su } S' \quad \text{e} \quad \underline{n}_0 \times \underline{H}(\underline{r}) \quad \text{su } S''$$

e che, inoltre, sia soddisfatta la *condizione di radiazione all'infinito* (sulla sfera all'infinito). Per i moduli dei campi, ciò si traduce in:

$$|\underline{E}(\underline{r})|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{e} \quad |\underline{H}(\underline{r})|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{su } S \rightarrow \infty$$



#### Note

- Nel caso in cui i mezzi siano idealmente **non dissipativi** (privi di perdite), si dimostra che nel dominio della frequenza la soluzione non è unica in quanto possono esistere “auto-soluzioni” corrispondenti a condizioni di risonanza (oscillazioni libere per problemi interni) del campo per particolari valori di frequenza.
- **Problemi equivalenti.** Se il problema in analisi si riferisce a un volume  $V$ , in cui siano presenti più sorgenti, il problema può essere ricondotto a un problema equivalente utilizzando le *condizioni al contorno* (vedi in seguito) su una superficie  $S$  fittizia che racchiuda le sorgenti non di interesse ed, eventualmente, la *condizione di radiazione* sulla sfera all'infinito. Infatti, l'applicazione del teorema di equivalenza (vedi in seguito) assicura l'assegnazione delle componenti tangenziali sulla superficie fittizia  $S$ .

## 2.2.b Teorema di dualità

Consideriamo due casi:

- *caso elettrico*, ove si tenga conto solo delle sole sorgenti elettriche;
- *caso magnetico*, ove si tenga conto solo delle sole sorgenti magnetiche.

Tramite le eq. di Maxwell (per brevità, non si esplicita la dipendenza da  $\mathbf{r}$ ), si ha:

*Caso elettrico*

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_c\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}$$

*Caso magnetico*

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}} - \underline{\mathbf{J}}_m$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_c\underline{\mathbf{E}}$$

La trasformazione seguente definisce la *dualità* tra il problema elettrico e quello magnetico.

Caso elettrico		Caso magnetico
$\underline{\mathbf{E}}$	$\leftrightarrow$	$\underline{\mathbf{H}}$
$\underline{\mathbf{H}}$	$\leftrightarrow$	$-\underline{\mathbf{E}}$
$\underline{\mathbf{J}}_m$	$\leftrightarrow$	$-\underline{\mathbf{J}}$
$\underline{\mathbf{J}}$	$\leftrightarrow$	$\underline{\mathbf{J}}_m$
$\underline{\mathbf{n}}_o \times \underline{\mathbf{E}}$	$\leftrightarrow$	$\underline{\mathbf{n}}_o \times \underline{\mathbf{H}}$
$\underline{\mathbf{n}}_o \times \underline{\mathbf{H}}$	$\leftrightarrow$	$-\underline{\mathbf{n}}_o \times \underline{\mathbf{E}}$
$\varepsilon_c$	$\leftrightarrow$	$\mu$
$\mu$	$\leftrightarrow$	$\varepsilon_c$
$\eta$	$\leftrightarrow$	$1/\eta$
$k$	$\leftrightarrow$	$k$

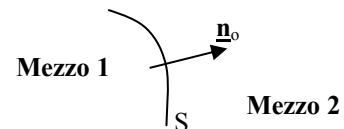
*Nota*

- Utilizzando la trasformazione di dualità, si verifica che la I eq. di Maxwell è duale della II eq. e viceversa; e analogamente, per le eq. di continuità della densità di corrente.

## 2.2.c Condizioni al contorno

Utilizzando il teorema di Gauss sulla divergenza e di Stokes sul rotore, si dimostra che all'interfaccia tra 2 mezzi, la discontinuità delle componenti tangenziali e normali dei campi è pari a:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{n}}_o \times (\underline{\mathbf{H}}_2 - \underline{\mathbf{H}}_1) &= \underline{\mathbf{k}} & \underline{\mathbf{n}}_o \times (\underline{\mathbf{E}}_2 - \underline{\mathbf{E}}_1) &= -\underline{\mathbf{k}}_m \\ \underline{\mathbf{n}}_o \cdot (\underline{\mathbf{D}}_2 - \underline{\mathbf{D}}_1) &= \rho_s & \underline{\mathbf{n}}_o \cdot (\underline{\mathbf{B}}_2 - \underline{\mathbf{B}}_1) &= \rho_{ms} \end{aligned} \quad \text{su } S$$



dove  $\underline{\mathbf{n}}_o$  è la normale uscente alla superficie di separazione  $S$  diretta verso il mezzo 2 e i pedici si riferiscono al mezzo di appartenenza.

Si definiscono le seguenti grandezze sulla superficie  $S$ :

- $\underline{\mathbf{k}}$ : densità lineare di corrente elettrica [A/m] o densità di corrente elettrica superficiale;
- $\underline{\mathbf{k}}_m$ : densità lineare di corrente magnetica [V/m] o densità di corrente magnetica superficiale;
- $\rho_s$ : densità superficiale di carica elettrica [C/m<sup>2</sup>];

- $\rho_{ms}$ : densità superficiale di carica magnetica [Wb/m<sup>2</sup>].

Note:

- Se il mezzo 1 è un **conduttore elettrico perfetto (CEP)**, ovvero idealmente un mezzo metallico a conducibilità infinita (ove  $\underline{E}_1 = \underline{H}_1 = 0$ ) con normale  $\underline{n}_o$  uscente dal conduttore, le condizioni al contorno diventano:

$$\begin{aligned} \underline{n}_o \times \underline{H}_2 &= \underline{k} & \underline{n}_o \times \underline{E}_2 &= -\underline{k}_m \\ \underline{n}_o \cdot \underline{D}_2 &= \rho_s & \underline{n}_o \cdot \underline{B}_2 &= \rho_{ms} \end{aligned} \quad \text{su CEP}$$

ovvero, fisicamente essendo  $\underline{k}_m = 0$ ,  $\rho_{ms} = 0$ :

$$\begin{aligned} \underline{n}_o \times \underline{H}_2 &= \underline{k} & \underline{n}_o \times \underline{E}_2 &= 0 \\ \underline{n}_o \cdot \underline{D}_2 &= \rho_s & \underline{n}_o \cdot \underline{B}_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{su CEP}$$

- Se il mezzo 1 è un **conduttore magnetico perfetto (CMP)**, ovvero idealmente un mezzo a permeabilità magnetica infinita (ove  $\underline{E}_1 = \underline{H}_1 = 0$ ), per dualità le condizioni al contorno diventano:

$$\begin{aligned} \underline{n}_o \times \underline{E}_2 &= -\underline{k}_m & \underline{n}_o \times \underline{H}_2 &= -\underline{k} = 0 \\ \underline{n}_o \cdot \underline{B}_2 &= -\rho_{ms} & \underline{n}_o \cdot \underline{D}_2 &= -\rho_s = 0 \end{aligned} \quad \text{su CMP}$$

- Se i mezzi 1 e 2 sono **dielettrici perfetti (DEP)**, ovvero idealmente mezzi privi di dissipazioni per conduzione, le condizioni al contorno diventano:

$$\begin{aligned} \underline{n}_o \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) &= 0 & \underline{n}_o \times (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) &= 0 \\ \underline{n}_o \cdot (\underline{D}_2 - \underline{D}_1) &= 0 & \underline{n}_o \cdot (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad \text{su DEP}$$

- Se il mezzo 1 è un **buon conduttore elettrico (BCE)**, ovvero un mezzo a conducibilità finita tale che  $\sigma_1 \gg \omega \epsilon_1$ , vale la condizione al contorno di Leontovich (condizione di impedenza superficiale):

$$\underline{n}_o \times \underline{E}_2 = Z_s \underline{n}_o \times \underline{J}_s \quad \text{su BCE}$$

dove  $Z_s$  è l'impedenza superficiale espressa attraverso la profondità di penetrazione  $\delta_s$ :

$$Z_s = \frac{1+j}{\sigma_1 \delta_s} = \frac{1+j}{\sigma_1} \sqrt{\frac{\omega \mu_1 \sigma_1}{2}} \quad [\Omega]$$

Note

- la parete CEP impone che la componente tangenziale di  $\underline{E}$  sia nulla e rappresenta una **condizione ideale di cortocircuito** con differenza di potenziale nulla tra due punti della superficie e corrente elettrica diversa da zero.
- la parete CMP impone che la componente tangenziale di  $\underline{H}$  sia nulla e rappresenta una **condizione ideale di circuito aperto** con corrente elettrica nulla e differenza di potenziale tra due punti della superficie diversa da zero.

## 2.2.d Teorema di Poynting

All'interno di un volume V racchiuso da una superficie S (con normale  $\underline{n}_o$  uscente) in cui siano contenute le sorgenti impresse in mezzo lineare, isotropo, omogeneo, non dispersivo e dissipativo, il bilancio energetico si esprime tramite:

$$\oint_S \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_o d^2 \underline{\mathbf{r}}' + 2j\omega \int_V (w_m - w_e) d^3 \underline{\mathbf{r}}' + \int_V p_c d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \int_V (p_{ei} + p_{mi}) d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

dove:

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* \quad \text{vettore di Poynting [W/m}^2\text{], ovvero densità di potenza irradiata attraverso S}$$

$$w_m = \frac{1}{4} \mu \underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{4} \mu |\underline{\mathbf{H}}|^2 \quad \text{densità di energia magnetica [J/ m}^3\text{] immagazzinata in V}$$

$$w_e = \frac{1}{4} \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^* = \frac{1}{4} \varepsilon |\underline{\mathbf{E}}|^2 \quad \text{densità di energia elettrica [J/ m}^3\text{] immagazzinata in V}$$

$$p_c = \frac{1}{2} \sigma \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^* = \frac{1}{2} \sigma |\underline{\mathbf{E}}|^2 \quad \text{densità di potenza [W/ m}^3\text{] dissipata per conduzione in V}$$

$$p_{ei} = -\frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* \quad \text{densità di potenza [W/ m}^3\text{] fornita (segno “-“) dalla sorgenti elettriche in V}$$

$$p_{mi} = -\frac{1}{2} \underline{\mathbf{H}}^* \cdot \underline{\mathbf{J}}_m \quad \text{densità di potenza [W/ m}^3\text{] fornita (segno “-“) dalla sorgenti magnetiche in V}$$

Note:

- la **parte reale** di ciascun termine complesso dell'espressione del teo. di Poynting esprime il valore medio in un periodo del corrispondente termine istantaneo nel dominio del tempo;
- in un mezzo **dispersivo temporalmente**, la funzione densità di energia immagazzinata  $w$  non è definibile in quanto non è più una funzione di stato.

## 2.2.e Potenziali elettrodinamici

- Per la sovrapposizione degli effetti, in un mezzo lineare il problema si può scomporre imprimendo separatamente le sorgenti elettriche  $\underline{\mathbf{J}}$  e le sorgenti magnetiche  $\underline{\mathbf{J}}_m$ .

### ➤ Caso di sorgenti elettriche

Se  $\underline{\mathbf{J}}_m=0$ , applicando la divergenza alla I eq. di Maxwell in un mezzo isotropo e omogeneo, si ha:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0$$

Il *potenziale vettore magnetico*  $\underline{\mathbf{A}}$  si definisce:

$$\underline{\mathbf{H}} \equiv \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \quad \text{con} \quad \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}' + \nabla \Phi$$

ove  $\Phi$  è una funzione scalare arbitraria. Sostituendo nella I eq. di Maxwell, si ottiene la definizione del *potenziale scalare magnetico*  $V$  attraverso:

$$\nabla V = -\underline{\mathbf{E}} - j\omega\mu\underline{\mathbf{A}}$$

Se vale la condizione di Lorentz per  $\underline{\mathbf{A}}$  e  $V$ :

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = -j\omega\varepsilon_c V,$$

allora il potenziale  $\underline{\mathbf{A}}$  soddisfa la seguente equazione vettoriale di Helmholtz non omogenea:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{J}}$$

Calcolato il potenziale  $\underline{\mathbf{A}}$  di Lorenz dalla precedente, il campo e.m. si ottiene attraverso:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}} &= \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu\underline{\mathbf{A}} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}}{j\omega\epsilon_c} \end{aligned}$$

### ➤ Caso di sorgenti magnetiche

Dualmente rispetto al caso elettrico, se  $\underline{\mathbf{J}}=0$  e applicando la divergenza alla I eq. di Maxwell in un mezzo isotropo e omogeneo, si ha:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0$$

Per dualità, il *potenziale vettore elettrico*  $\underline{\mathbf{F}}$  si definisce:

$$\underline{\mathbf{E}} \equiv -\nabla \times \underline{\mathbf{F}} \quad \text{con} \quad \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}' + \nabla \Phi_e$$

ove  $\Phi_e$  è una funzione scalare arbitraria.

Il potenziale  $\underline{\mathbf{F}}$  soddisfa la seguente equazione vettoriale di Helmholtz non omogenea:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{F}} + k^2 \underline{\mathbf{F}} = -\underline{\mathbf{J}}_m$$

Calcolato il potenziale vettore elettrico  $\underline{\mathbf{F}}$  di Lorenz dalla precedente, il campo e.m. si ottiene attraverso:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= -\nabla \times \underline{\mathbf{F}} \\ \underline{\mathbf{H}} &= -j\omega\epsilon_c \underline{\mathbf{F}} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{F}}}{j\omega\mu} \end{aligned}$$

#### Note

- Se il mezzo è lineare, il campo e.m. in presenza di sorgenti *sia elettriche che magnetiche* si ottiene per sovrapposizione degli effetti dei campi e.m., calcolati dai potenziali elettrici e magnetici.
- In mezzi disomogenei elettricamente e magneticamente, non è possibile definire il potenziale magnetico ed elettrico come in precedenza, visto che  $\epsilon=\epsilon(\underline{\mathbf{r}})$  e  $\mu=\mu(\underline{\mathbf{r}})$ . Tuttavia, si può ancora definire il *potenziale vettore magnetico*  $\underline{\mathbf{A}}$  nel seguente modo:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{B}} \equiv \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$$

e dualmente per  $\underline{\mathbf{F}}$ .

## 2.2.f Onde piane

- Una soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee (cioè, in assenza di sorgenti all'interno di un volume riempito da un mezzo lineare, omogeneo, isotropo), ovvero della corrispondente eq. associata di Helmholtz o eq. delle onde, è l'**onda piana** il cui campo elettrico in regime monocromatico si scrive nella seguente forma:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \underline{r}} = \underline{E}_0 e^{-j\mathbf{\beta} \cdot \underline{r}} e^{-\mathbf{\alpha} \cdot \underline{r}}$$

- dove  $\mathbf{k} = \mathbf{\beta} - j\mathbf{\alpha}$  è il vettore di propagazione, generalmente complesso, tale che  $|\mathbf{k}|^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c$   
 $\mathbf{\beta}$  è il vettore di fase [1/m] tale che le superfici equifase sono i piani in cui  $\mathbf{\beta} \cdot \underline{r} = \text{costante}$   
 $\mathbf{\alpha}$  è il vettore di attenuazione [1/m] tale che le superfici equiampiezza sono i piani in cui  $\mathbf{\alpha} \cdot \underline{r} = \text{costante}$   
 $\underline{E}_0$  è il vettore complesso [V/m] che descrive lo stato di polarizzazione (lineare, circolare, ellittica)

- Un caso particolarmente rilevante è l'**onda piana uniforme** che si propaga in un mezzo **non dissipativo** avente  $\alpha = 0$  e  $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ , ovvero l'onda del tipo

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_0 e^{-j\mathbf{\beta} \cdot \underline{r}}$$

Specializzando l'espressione del campo nel caso di onda che si propaga lungo l'asse  $z$  ( $\mathbf{\beta} = \beta \underline{z}_0$ ), l'andamento nel tempo si ottiene moltiplicando la rappresentazione complessa per  $e^{j\omega t}$  e considerando la parte reale:

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \text{Re} \left[ \underline{E}_0 e^{-j\mathbf{\beta} \cdot \underline{r}} e^{j\omega t} \right] = \underline{E}_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

I piani **equifase** sono ortogonali all'asse  $z$  e la velocità di fase  $u$  dell'onda (velocità di un osservatore che rilevi fase costante) è data dalle seguenti relazioni:

$$\beta dz - \omega dt = 0 \Rightarrow u = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Si noti come nel vuoto, essendo  $\mu = \mu_0$  e  $\epsilon = \epsilon_0$ , tale velocità coincide con la costante  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (velocità della luce nel vuoto). Per un mezzo non dissipativo diverso dal vuoto con  $\mu \approx \mu_0$ , risulta:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} < c$$

essendo  $\epsilon_r$  la costante dielettrica relativa e l'indice di rifrazione  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ , entrambi maggiori dell'unità.

- Se il mezzo è **dissipativo** risulta necessariamente  $\alpha \neq 0$  per cui l'onda è attenuata. Di nuovo, particolarmente rilevante è il caso di onda piana uniforme in cui l'attenuazione avviene nella stessa direzione della propagazione. Nel caso di propagazione lungo  $z$  si ottiene un andamento spazio-temporale del campo nella forma seguente:

$$\underline{\tilde{E}}(\underline{r}, t) = \text{Re} \left[ \underline{E}_0 e^{-j\beta z} e^{-\alpha z} e^{j\omega t} \right] = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

La velocità di fase vale ancora  $u = \omega/\beta$ . La costante di propagazione  $\beta$  e la costante di attenuazione  $\alpha$  sono però legate alla costante del mezzo, ed in particolare alla costante dielettrica complessa, in modo più complicato. Ricordando la definizione dell'indice di rifrazione complesso:

$$n = n' - jn'' \cong \sqrt{\epsilon_r' - j\epsilon_r''}$$

Sviluppando la radice ed indicando con  $k_0 = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  la costante di propagazione nel vuoto e con  $\lambda_0$  la lunghezza d'onda nel vuoto, per la costante di propagazione e per la costante di attenuazione nel mezzo dissipativo si ottengono le seguenti:

$$\beta = k_0 n' = \frac{2\pi}{\lambda_0} n' = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left\{ \frac{\epsilon_r' + \sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2}}{2} \right\}^{1/2}$$

$$\alpha = k_0 n'' = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\epsilon_r''}{2n'} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left\{ \frac{\sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2} - \epsilon_r'}{2} \right\}^{1/2}$$

Quando il mezzo risulta poco dissipativo, ovvero  $\epsilon_r'' \ll \epsilon_r'$ , le quantità si approssimano nel modo seguente:

$$\beta \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r'} \quad \text{e} \quad \alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\epsilon_r''}{2\sqrt{\epsilon_r'}}$$

Per onde piane ed uniformi il campo elettrico è diretto ortogonalmente a  $\underline{\beta}$ , mentre quello magnetico è ortogonale ad entrambi ed il rapporto tra l'ampiezza del campo elettrico e quella del campo magnetico è pari all'impedenza caratteristica del mezzo  $\eta$ :

$$\frac{E_0}{H_0} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}}$$

Il vettore di Poynting risulta, pertanto, diretto come il vettore di propagazione e pari a:

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2\eta} |\underline{\mathbf{E}}_0|^2 e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} \underline{\beta}_o$$

## 2.2.g Spettro di onde piane

In un mezzo lineare, stazionario, isotropo, omogeneo, non dispersivo e non dissipativo è possibile dimostrare che un campo elettromagnetico qualsiasi può essere espresso come la combinazione di una infinità di onde piane ( $\infty^2$ ). Con riferimento ad una specifica componente cartesiana del campo  $E$  in regime armonico sussiste la seguente formula:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{k_x, k_y}(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z} dk_x dk_y$$

dove

$$E_{k_x, k_y}(k_x, k_y) = E_{k_t}(\underline{\mathbf{k}}_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, 0) e^{jk_x x + jk_y y} dx dy = \mathfrak{T}_{x, y} \{ E(x, y, 0) \} \quad E(x, y, 0) \supset E_{k_t}(k_x, k_y)$$

e inoltre:

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_x^2 - k_y^2}$$

*Dimostrazione*

- Nel mezzo considerato in assenza di sorgenti ciascuna componente scalare del campo elettrico soddisfa l'eq. di Helmholtz omogenea (si veda nel seguito) che scriviamo in coordinate cartesiane:

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = 0$$

- Se  $E(\mathbf{r})$  ammette la trasformata di Fourier bidimensionale (trasversa)  $E_{kt}(k_x, k_y, z)$  rispetto alle variabili  $x$  e  $y$  scriviamo l'espressione della antitrasformata:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int E_{kt}(k_x, k_y, z) e^{-jk_x x - jk_y y} dk_x dk_y$$

- Introducendo questa espressione nella eq. di Helmholtz e ricordando la regola della derivata di una trasformata:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \left[ (-jk_x)^2 + (-jk_y)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] E_{kt}(k_x, k_y, z) e^{-jk_x x - jk_y y} dk_x dk_y = 0 \\ \left[ k^2 - k_x^2 - k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_{kt}(k_x, k_y, z) &= k_z^2 E_{kt}(k_x, k_y, z) + \frac{d^2 E_{kt}(k_x, k_y, z)}{dz^2} = 0 \end{aligned}$$

- Da questa:

- ove  $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$ . L'ultima eguaglianza è la classica eq. del moto armonico la cui soluzione generale è:

$$\frac{d^2 E_{kt}(k_x, k_y, z)}{dz^2} + k_z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{kt}(k_x, k_y, z) = C_1 e^{-jk_z z} + C_2 e^{+jk_z z}$$

- Le onde che si propagano nella direzione delle  $z$  positive hanno  $C_2=0$  (non ci sono sorgenti per  $z \rightarrow \infty$ ). La costante  $C_1$  deriva imponendo una condizione al contorno. In particolare se è noto il campo sul piano  $z=0$ :

$$E_{kt}(k_x, k_y, 0) = E_{kt}(k_x, k_y) = C_1 \quad \Rightarrow \quad E_{kt}(k_x, k_y, z) = E_{kt}(k_x, k_y) e^{-jk_z z}$$

- che sostituita nell'espressione della antitrasformata fornisce quanto si voleva dimostrare.

*Note:*

- $E_{kt}(\mathbf{k}_t)$  è la trasformata di Fourier *trasversa* rispetto alle variabili spaziali  $x$  e  $y$  del campo sul piano  $z=0$ . Le variabili trasformate  $k_x$  e  $k_y$  sono le *frequenze spaziali* (in analogia alla frequenza nella trasformata rispetto al tempo).
- La formula esprime il fatto che  $E(x, y, z)$  è la somma (integrale) di termini del tipo:

$$E_{k_x, k_y}(k_x, k_y) dk_x dk_y e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} = E_{k_x, k_y}(k_x, k_y) dk_x dk_y e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Ognuno di questi termini è un'onda piana nel mezzo considerato che si propaga con vettore di propagazione  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0 + k_z \mathbf{z}_0$  in quanto, in base alla formula di  $k_z$ , vale evidentemente la relazione di dispersione  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ .

- Nell'integrale sono incluse anche onde evanescenti quando  $k_x^2 + k_y^2 > \omega^2 \mu \epsilon$  per cui  $k_z$  diviene immaginaria.

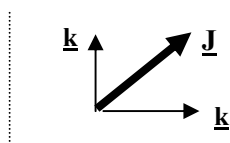
## 2.3 TEOREMI FONDAMENTALI PER ANTENNE

### 2.3.a Teorema delle immagini

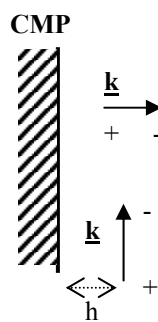
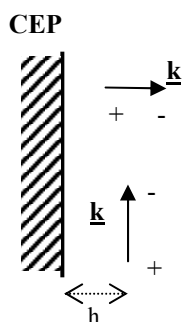
#### ➤ Caso di sorgenti elettriche

##### Ipotesi

- Assegniamo nello spazio libero le sole densità di corrente elettriche  $\underline{J}$  a distanza  $h$  da un piano, decomposte secondo le loro componenti  $\underline{k}$  (*sorgenti reali*) parallele o ortogonali ai piani stessi, come indicato in figura.

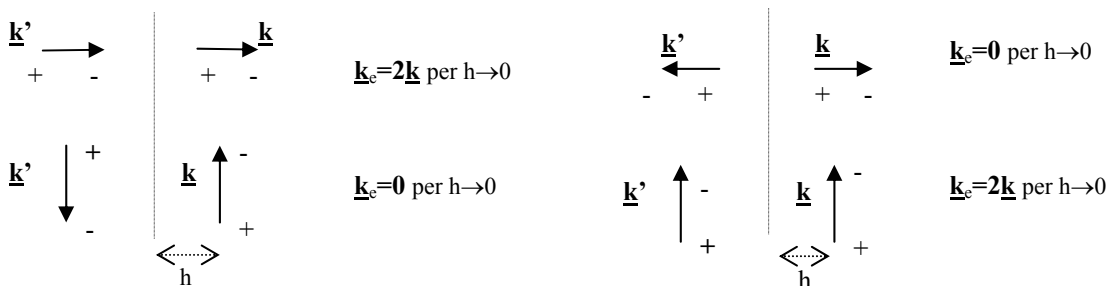


- Consideriamo le sorgenti  $\underline{k}$  in un semispazio vuoto delimitato da un'interfaccia piana, costituita da un mezzo *conduttore elettrico perfetto* (CEP) o dal suo duale *conduttore magnetico perfetto* (CMP) (nella figura, semispazio a sinistra).



##### Si dimostra che:

- E' possibile rimuovere i piani CEP o CMP, introducendo le *sorgenti immagine*  $\underline{k}'$  della *sorgente reale*  $\underline{k}$  secondo le regole illustrate in figura;
- Al tendere di  $h$  a zero, la sorgente totale equivalente  $\underline{k}_e$  raddoppia o si annulla a seconda dell'orientamento di  $\underline{k}$  e del tipo di conduttore considerato.



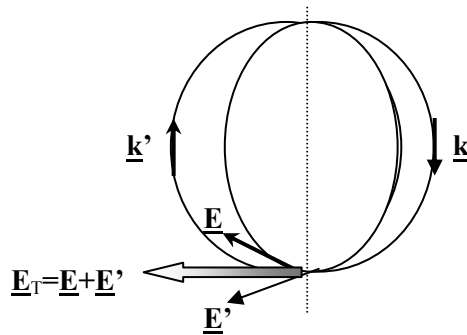
Note

- Le **regole** per il calcolo della sorgente immagine si possono dedurre schematicamente orientando le correnti  $\underline{k}$ , come usuale, dall'estremo a tensione positiva a quello a tensione negativa e considerando che nel caso CEP l'*immagine di una carica positiva* è una carica negativa e viceversa nel caso CMP.

**Intuitivamente**, infatti, poiché una corrente  $\underline{k}$  rappresenta un movimento di cariche positive da un punto a tensione maggiore (positiva) a un punto a tensione minore (negativa), la carica negativa si sposta in sincronia con quella positiva (di cui è immagine) determinando una corrente  $\underline{k}'$  verso opposto al suo movimento. Quindi, nel caso di  $\underline{k}$  ortogonale al piano CEP (i.e., cariche positive che si allontanano dal piano verso destra in figura) corrisponde una  $\underline{k}'$  immagine nello stesso verso (immagini negative che si allontanano dal piano verso sinistra). Viceversa, nel caso di  $\underline{k}$  parallela al piano CEP corrisponde una  $\underline{k}'$  immagine nel verso opposto.

**In altri termini**, nel caso CEP le componenti  $\underline{k}$  parallele al piano danno luogo a delle immagini parallele *in controfase* (verso opposto), mentre le componenti  $\underline{k}$  ortogonali danno luogo a delle immagini ortogonali al piano e *in fase* (verso uguale). Nel caso CMP le sorgenti  $\underline{k}'$  seguiranno la regola opposta.

- Il **problema equivalente di radiazione** in presenza di piani CEP o CMP consiste, quindi, nel considerare il campo sovrapposizione generato dalla sorgente reale e quella immagine in assenza del piano stesso, ovvero in spazio libero;
- In modo rigoroso, le *regole* si ricavano dalle eq. di Maxwell imponendo le condizioni al contorno sui piani CEP e CMP e verificando che nel problema equivalente di radiazione siano ancora soddisfatte tali condizioni. Qualitativamente, tracciando **le linee di forza del campo** elettrico originato da una sorgente  $\underline{k}$  parallela si ha per costruzione:



Il campo totale  $\underline{E}_T$ , risultante dalla sovrapposizione del campo  $\underline{E}$  (originati dalla sorgente reale  $\underline{k}$ ) e del campo  $\underline{E}'$  (originato dalla sorgente immagine  $\underline{k}'$ ) soddisfa la condizione al contorno di componente tangenziale nulla sul piano, come imposto dal problema originario in presenza di un CEP.

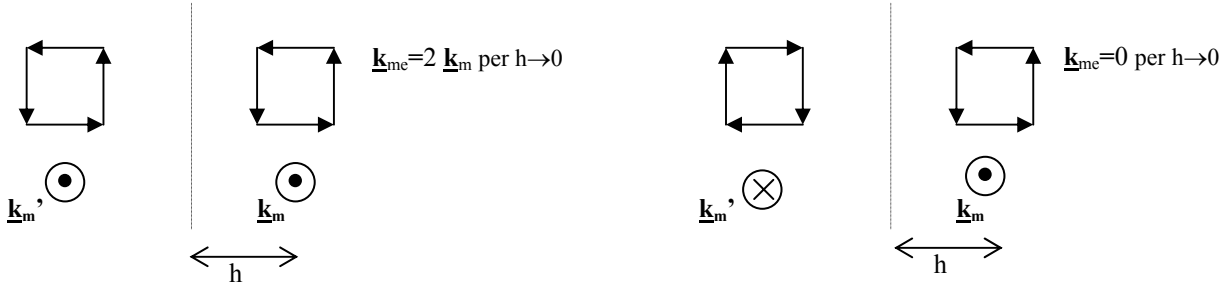
### ➤ Caso di sorgenti magnetiche

- Consideriamo ancora un piano CEP e il suo duale CMP;
- Assegniamo una sorgente magnetica  $\underline{J}_m$ , distante  $h$  dai piani CEP e CMP e parallela ad essi, schematizzata come una **spira quadrata di corrente** (vedi dipolo magnetico elementare nel seguito) sul piano del foglio, il cui momento magnetico è ortogonale al piano della spira (uscendo dal foglio) (si ricordi che il verso del momento magnetico è tale che un osservatore, con esso coincidente, veda osservare la corrente della spira ruotare in senso anti-orario).
- Supponiamo che la spira di corrente sia **decomponibile** secondo densità di corrente  $\underline{k}$ , orientate secondo una direzione parallela o ortogonale ai piani stessi (in figura, si mostra una spira di forma quadrata).
- Per brevità, *non consideriamo* il caso di una sorgente magnetica superficiale  $\underline{J}_m$  ortogonale ai piani, schematizzabile in modo analogo come una spira quadrata di corrente parallela ai piani e con momento magnetico ad essi normale.



Si dimostra che:

- è possibile rimuovere i piani CEP o CMP, introducendo le *sorgenti immagine*  $\underline{k}_m'$  della *sorgente reale*  $\underline{k}_m$  secondo le regole illustrate in figura;
- al tendere di  $h$  a zero, la sorgente totale equivalente  $\underline{k}_{me}$  raddoppia o si annulla a seconda del tipo di conduttore considerato.



Note:

- Le regole per il calcolo delle correnti magnetiche immagine si possono dedurre intuitivamente applicando il teorema delle immagini per il caso di sorgenti elettriche, visto in precedenza, a ciascuna delle  $\underline{k}$  che costituiscono la spira. Nel caso di piano CEP e corrente magnetica parallela, se la *spira di corrente reale* ha il verso antiorario delle correnti si nota che la *spira di corrente immagine* avrà anch'essa il verso antiorario delle correnti; di conseguenza, i vettori  $\underline{k}_m$  e  $\underline{k}_m'$  avranno in entrambe i mezzi il verso uscente dal foglio. In altri termini, le componenti  $\underline{k}_m$  parallele al piano danno luogo a delle immagini parallele *in fase* (verso uguale), mentre le componenti  $\underline{k}_m$  ortogonali danno luogo a delle immagini ortogonali al piano e *in controfase* (verso opposto). Nel caso CMP le sorgenti  $\underline{k}_m$  seguiranno la regola opposta.
- Nel caso CEP al tendere di  $h$  a zero, sulla superficie avrà le *correnti magnetiche equivalenti parallele* raddoppiate, ovvero  $\underline{k}_{me} = 2 \underline{k}_m$ . Nel caso CMP, il comportamento è duale, cioè avrà  $\underline{k}_{me} = 0$ .
- In modo analogo, si ricavano le regole per densità di corrente magnetica ortogonale ai piani CEP e CMP.

### 2.3.b Teorema di reciprocità (di Lorentz)

Ipotesi

- consideriamo il volume  $V$  racchiuso dalla superficie  $S$  in cui sia presente un mezzo lineari e isotropo;
- in  $V$  siano assegnate le sorgenti  $\underline{J}_1, \underline{J}_{m1}$  che producono il campo e.m.  $\underline{E}_1, \underline{H}_1$ ;
- in  $V$  siano assegnate le sorgenti  $\underline{J}_2, \underline{J}_{m2}$  che producono il campo e.m.  $\underline{E}_2, \underline{H}_2$ ;

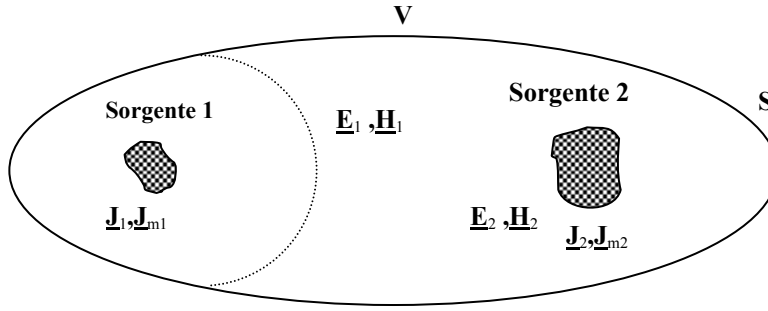
Dalle eq. di Maxwell, con semplici passaggi algebrici, *si dimostra* che:

$$\oint_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{n}_o d^2 \underline{r}' = I_{12} - I_{21}$$

dove  $\underline{n}_o$  è la normale uscente da  $S$  e

$$I_{12} = \int_V (\underline{J}_1 \cdot \underline{E}_2 - \underline{J}_{m1} \cdot \underline{H}_2) d^3 \underline{r}' \quad \text{Integrale di reazione della sorgente 2 sulla 1}$$

$$I_{21} = \int_V (\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{J}_{m2} \cdot \mathbf{H}_1) d^3 \mathbf{r}' \quad \text{Integrale di reazione della sorgente 1 sulla 2}$$



*Dimostrazione:*

Si consideri la seguente divergenza, sviluppata secondo le regole dell'analisi vettoriale:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = \mathbf{H}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_1$$

Eliminando i rotori a secondo membro tramite le equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}_m \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_c\mathbf{E} + \mathbf{J} \end{cases}$$

applicate al campo 1 e 2, il secondo membro assume la forma:

$$\mathbf{H}_2 \cdot (-j\omega\mu\mathbf{H}_1 - \mathbf{J}_{m1}) - \mathbf{E}_1 \cdot (j\omega\epsilon_c\mathbf{E}_2 + \mathbf{J}_2) - \mathbf{H}_1 \cdot (-j\omega\mu\mathbf{H}_2 - \mathbf{J}_{m2}) + \mathbf{E}_2 \cdot (j\omega\epsilon_c\mathbf{E}_1 + \mathbf{J}_1)$$

Elidendo i termini uguali, risulta:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{J}_{m1} - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{J}_{m2}$$

Integrando la precedente su un volume V limitato da una superficie S e applicando il teorema della divergenza di Gauss al primo membro:

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n}_o d^3 \mathbf{r} = \oint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n}_o d^2 \mathbf{r}$$

si ottiene la tesi del teorema.

## ➤ Formula di reciprocità di Lorentz

Se S è una superficie di impedenza, ovvero:

- un conduttore elettrico perfetto (vedi condizioni al contorno)
- un buon conduttore elettrico (vedi condizioni al contorno)
- la sfera all'infinito, ove valgono le condizioni di radiazione

si dimostra (facilmente) che l'integrale di superficie si annulla, per cui:

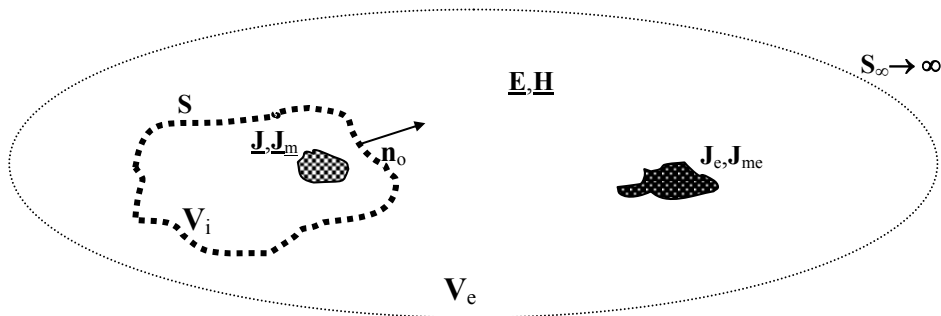
$$\int_V (\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{J}_{m1} \cdot \mathbf{H}_2) d^3 \mathbf{r}' = \int_V (\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{J}_{m2} \cdot \mathbf{H}_1) d^3 \mathbf{r}' \quad \Rightarrow \quad I_{12} = I_{21}$$

La formula di reciprocità di Lorentz afferma che si ha l'*eguaglianza delle reazioni* dei campi sulle sorgenti.

### 2.3.c Teorema di equivalenza (di Love)

#### Ipotesi

- consideriamo il *volume interno*  $V_i$ , racchiuso dalla superficie  $S$  (eventualmente fittizia), in cui siano assegnate le sorgenti dette “interne”  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}_m$ ;
- consideriamo il volume esterno  $V_e$  (delimitato da  $S$  e da  $S_\infty$ ) in cui siano assegnate le sorgenti dette “esterne”  $\mathbf{J}_e$ ,  $\mathbf{J}_{me}$ ;



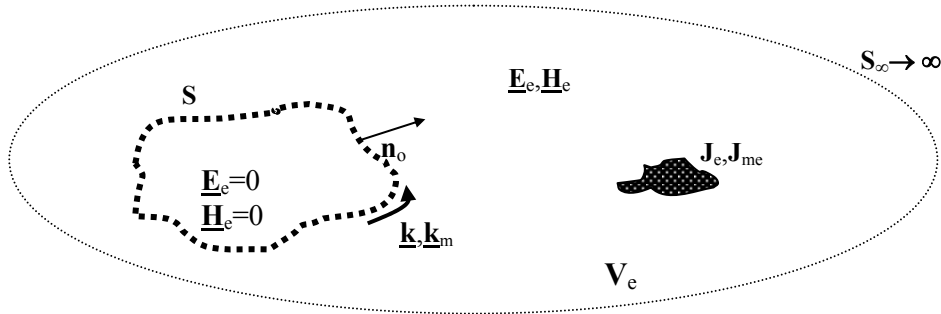
- l'insieme delle sorgenti interne ed esterne generino un campo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  in ogni punto dei volumi  $V_i$  e  $V_e$ , soluzione delle eq. di Maxwell;
- consideriamo il volume esterno  $V_e$  (delimitato da  $S$  e da  $S_\infty$ ) e definiamo un campo  $\mathbf{E}_e$ ,  $\mathbf{H}_e$  tale che:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e = \mathbf{H}_e = 0 & \quad \text{in } V_i \\ \mathbf{E}_e = \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_e = \mathbf{H} & \quad \text{in } V_e \end{aligned}$$

#### Si dimostra che:

- il campo  $\mathbf{E}_e$ ,  $\mathbf{H}_e$  è soluzione delle eq. di Maxwell in  $V_i$  e in  $V_e$
- il campo e.m., all'esterno della superficie chiusa  $S$ , è esprimibile in termini di sorgenti superficiali (densità lineari di corrente) equivalenti  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}_m$ , che irradiano in assenza delle sorgenti interne  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}_m$  e in presenza di quelle esterne  $\mathbf{J}_e$ ,  $\mathbf{J}_{me}$ , e si determinano a partire dalla conoscenza su  $S$  delle componenti tangenziali del campo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{n}_o \times \mathbf{H} & \text{su } S \\ \mathbf{k}_m &= -\mathbf{n}_o \times \mathbf{E} & \text{su } S \end{aligned}$$



#### Dimostrazione:

- il campo  $\underline{E}_e, \underline{H}_e$  è soluzione delle eq. di Maxwell in  $V_e$  in quanto coincide con  $\underline{E}, \underline{H}$ ;
- il campo  $\underline{E}_e, \underline{H}_e$  è soluzione in  $V_i$  in quanto  $\underline{E}_e=0$  e  $\underline{H}_e=0$  è ancora soluzione delle eq. di Maxwell;
- il campo  $\underline{E}_e, \underline{H}_e$  è discontinuo su  $S$  e tale discontinuità soddisfa le condizioni al contorno;
- le componenti tangenziali di  $\underline{E}_e, \underline{H}_e$  su  $S$  valgono  $\underline{n}_0 \times \underline{E}_e = \underline{n}_0 \times \underline{E}$  e  $\underline{n}_0 \times \underline{H}_e = \underline{n}_0 \times \underline{H}$ , mentre  $\underline{E}_e, \underline{H}_e$  soddisfano per costruzione le condizioni di radiazione all'infinito;
- considerando che le sorgenti esterne  $\underline{J}_e, \underline{J}_{me}$  sono rimaste invariate, per il teorema di unicità il campo  $\underline{E}_e, \underline{H}_e$  è l'unica soluzione nel volume esterno  $V_e$  a  $S$ .

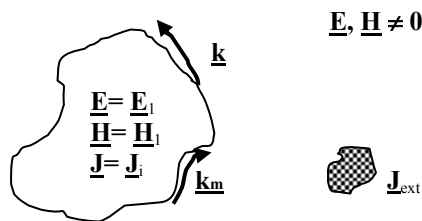
#### Note

- Il teorema di Love rappresenta la formulazione elettromagnetica del *principio di Huygens* che considera ciascun punto investito dal campo come una nuova sorgente per la successiva generazione del campo. In altri termini, il campo e.m. in un punto è determinabile a partire dalla conoscenza di quello tangenziale assegnato su una qualunque superficie chiusa.
- Se siamo interessati alla determinazione del campo in una certa regione, possiamo disinteressarci di ciò che è presente all'esterno e rappresentare gli "effetti" con un'opportuna distribuzione superficiale di corrente  $\underline{k}$  e  $\underline{k}_m$ . E' chiaro che tali correnti dipendono proprio dal campo incognito nella regione di interesse, per cui tale approccio "sposta", ma non "risolve" il problema.

### ➤ Forme del teorema di equivalenza

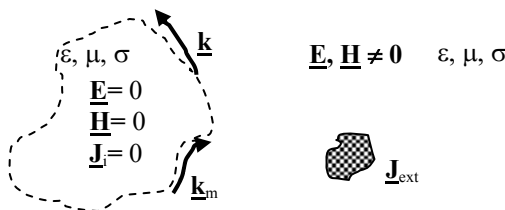
- All'interno del volume interno  $V_i$ , essendo  $\underline{E}_e=0$  e  $\underline{H}_e=0$  per costruzione, può essere imposto un mezzo di natura arbitraria, in quanto non interagisce con il campo, e quindi più conveniente ai fini della semplificazione del problema.
- Consideriamo alcuni *casi* nella forma schematica seguente,

#### 1. Caso in cui si assegna un **campo arbitrario** nel volume interno (estensione della formulazione del teorema di Love)



$$\Rightarrow \quad \underline{k} = \underline{n}_0 \times (\underline{H} - \underline{H}_i), \quad \underline{k}_m = -\underline{n}_0 \times (\underline{E} - \underline{E}_i)$$

#### 2. Caso in cui si assegna nel volume interno un mezzo identico a quello nel volume esterno



$$\Rightarrow \quad \underline{k} = \underline{n}_0 \times \underline{H}, \quad \underline{k}_m = -\underline{n}_0 \times \underline{E}$$

#### Nota

- in questo caso, le sorgenti  $\underline{k}, \underline{k}_m$  e  $\underline{J}_{ext}$  irradiano nello spazio libero. Il fatto che il teo. di unicità richieda solo l'assegnazione delle componenti tangenziali di  $\underline{E}$  o di  $\underline{H}$  sembrerebbe rendere superflua l'imposizione sia di  $\underline{k}$  che  $\underline{k}_m$ .

Tuttavia, se imponessimo per esempio solo  $\underline{k}_m$ , non garantiremmo la discontinuità della componente tangenziale di  $\underline{H}$  su  $S$ , quindi  $\underline{H}$  può essere non nulla nel volume interno, in contraddizione con le ipotesi del teo. di equivalenza.

### 3. Caso in cui si assegna un **mezzo perfetto** nel volume interno



#### Nota

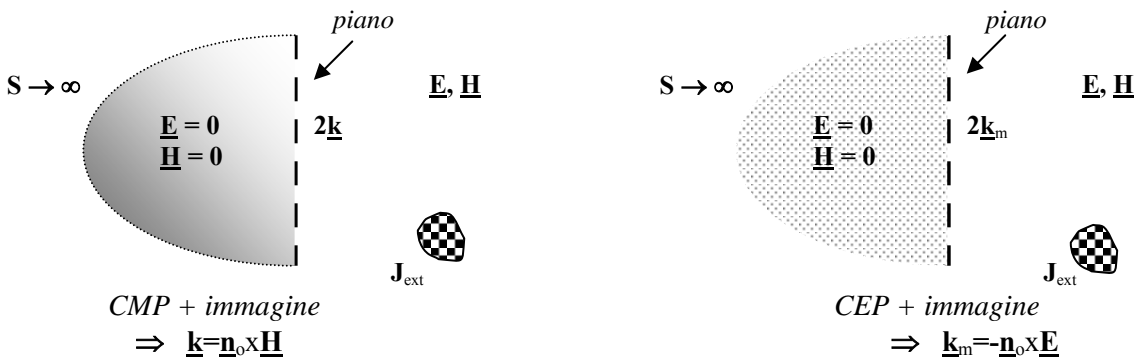
- Nel caso di riempimento del volume interno mediante CEP, si osserva che le correnti superficiali  $\underline{k}$  imposte sul CEP non irradiano in quanto “corto-circuitate” dalla stessa superficie conduttrice. Infatti, su un CEP il campo elettrico è normale alla superficie per cui  $\underline{k} \cdot \underline{E} = 0$ . Ricordando il teorema di Poynting e considerando il termine che descrive il trasferimento di potenza dalle sorgenti al campo e.m., si ha:

$$\int_V (p_{ei} + p_{mi}) d^3 \underline{r}' = -\frac{1}{2} \int_V (\underline{E} \cdot \underline{J}^* + \underline{H}^* \cdot \underline{J}_m) d^3 \underline{r}' = -\frac{1}{2} \oint_S (\underline{E} \cdot \underline{k}^* + \underline{H}^* \cdot \underline{k}_m) d^2 \underline{r}' = -\frac{1}{2} \oint_S (\underline{H}^* \cdot \underline{k}_m) d^2 \underline{r}'$$

Ciò significa che si possono imprimere su  $S$  solo le  $\underline{k}_m$  ai fini del calcolo del campo nel volume esterno, visto che sono le sole correnti superficiali che irradiano in presenza del CEP. Le correnti  $\underline{k}$  saranno, comunque, presenti come *conseguenza* delle eq. di Maxwell per garantire la discontinuità del campo magnetico.

- Nel caso di riempimento del volume interno mediante CMP, la dualità porta ad affermare che le  $\underline{k}_m$  non irradiano in quanto si ha che  $\underline{k}_m \cdot \underline{H} = 0$

### 4. Caso in cui volume interno è delimitato da una **superficie piana** di tipo CMP o CEP

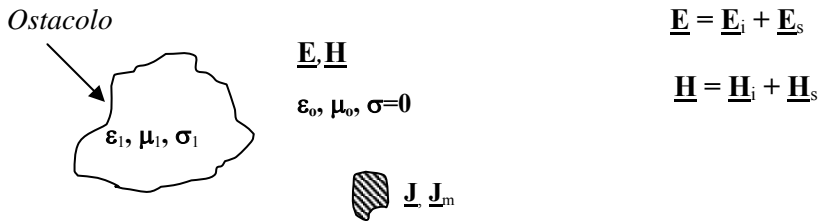


#### Note finali

- Il vantaggio dell'uso del teorema di equivalenza sta nella *possibilità di scegliere la superficie  $S$*  in modo da poter calcolare più agevolmente su di essa la distribuzione di campo (rispetto a dover considerare la geometria della sorgente reale).
- Nel caso di volume riempito da CEP o CMP, ci si può limitare ad imporre le sole correnti elettriche o magnetiche superficiali che però irradiano in presenza di un ostacolo, cioè il volume corpo CEP o CMP.
- Nel caso di superfici piane di tipo CEP o CMP, si può utilizzare il *teo. delle immagini* per ridurre le sorgenti equivalenti a sole sorgenti elettriche o magnetiche in spazio libero.

### 2.3.d Teorema di induzione

- Estensione del teorema di equivalenza a mezzi disomogenei, ovvero presenza di ostacoli.
- Prendiamo in considerazione il fatto che, nello spazio (vuoto) in cui si vuole determinare il campo, sia presente un mezzo con caratteristiche elettriche ( $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ ) diverse rispetto allo spazio circostante.



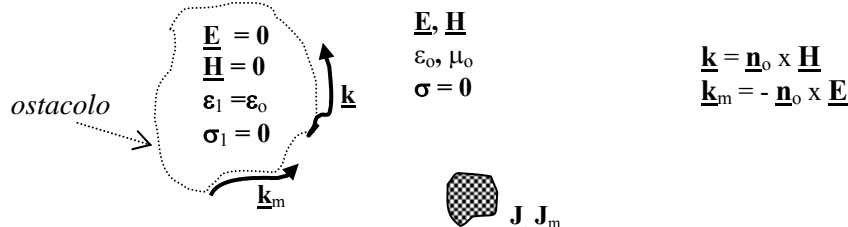
Si definiscono:

$\underline{E}_i, \underline{H}_i$ : campi incidenti, ovvero campi prodotti in assenza di ostacolo.

$\underline{E}_s, \underline{H}_s$ : campi di diffusione pari  $\underline{E}_s = \underline{E} - \underline{E}_i$  e  $\underline{H}_s = \underline{H} - \underline{H}_i$ , prodotti dalle sorgenti indotte dal campo incidente sull'ostacolo.

#### ➤ Prima forma del teo. di induzione

Una prima forma del teorema di induzione si ottiene nel modo seguente:

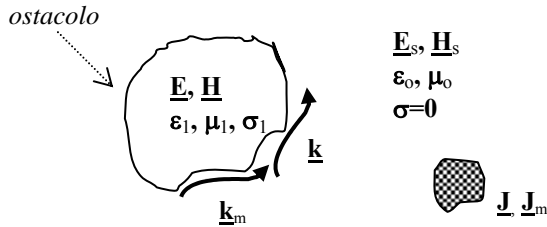


- Si applica il teorema di equivalenza, ricavando le sorgenti superficiali equivalenti e imponendo campo nullo all'interno dell'ostacolo;
- Essendo nullo il campo interno, non c'è interazione con il mezzo per cui si può considerare l'ostacolo come volume dielettrico con le stesse caratteristiche dello spazio circostante:

$$\epsilon_1 = \epsilon_0, \mu_1 = \mu_0, \sigma_1 = 0$$

#### Note

- Utilizzando questa forma del teorema, il risultato di tutti i fenomeni di induzione sull'ostacolo si riconducono alla presenza di correnti superficiali equivalenti che irradiano nello *spazio libero* e che generano il campo  $\underline{E}_s, \underline{H}_s$ , mentre le correnti impresse  $\underline{J}, \underline{J}_m$  sono le sorgenti del campo incidente. In realtà, tali correnti superficiali  $\underline{k}, \underline{k}_m$  non sono note in quanto dipendono dai campi incogniti  $\underline{E}, \underline{H}$ . Il problema si affronta, generalmente, cercando delle espressioni approssimate di tali correnti.
- Nel caso in cui l'ostacolo sia un *mezzo CEP*, avremo le condizioni trattate precedentemente sulle correnti superficiali ed, in particolare, avremo solo correnti indotte di tipo elettrico essendo  $\underline{k}_m = 0$ .

➤ **Seconda forma del teo. di induzione**

$$\underline{k} = \underline{n}_o \times (\underline{H}_s - \underline{H}) = -\underline{n}_o \times \underline{H}_i$$

$$\underline{k}_m = -\underline{n}_o \times (\underline{E}_s - \underline{E}) = \underline{n}_o \times \underline{E}_i$$

- Si considera all'interno dell'ostacolo il campo  $\underline{E}, \underline{H}$  che è effettivamente presente, mentre all'esterno si impone il campo di diffusione  $\underline{E}_s, \underline{H}_s$ .
- Le correnti superficiali  $\underline{k}, \underline{k}_m$  risultano, in tal modo, note visto che dipendono solo dal campo incidente.

*Note*

- Anche con questo modello siamo passati da un problema di diffrazione ad un semplice **problema di radiazione** da sorgenti note in quanto dipendono dai campi incidenti assegnati.
- Nella seconda forma, a differenza del caso precedente, le **sorgenti equivalenti** sono calcolabili facilmente. Tuttavia, sorge il problema che le sorgenti equivalenti non irradiano più nello spazio libero, come avveniva nella prima forma, ma in presenza di un mezzo differente. Quindi, si ripropone il problema della diffrazione.

**2.3.e Teorema di similitudine**

- Questo teorema consente di risolvere problemi come quelli di *misura delle antenne a grande distanza*. Infatti, in questa zona effettuare delle misure richiederebbe l'uso di grandi laboratori.
  - Scalando rispetto alla frequenza, è possibile realizzare dei modelli ridotti facilmente misurabili conservandone le proprietà e.m. di interesse.
- In genere, una grandezza fisica è caratterizzata da un'espressione simbolica adimensionale (eventualmente vettoriale, che la lega ad altre grandezze) e da un fattore di scala determinato dalla unità di misura adottata. Definiamo:

$$\underline{E} = \underline{E}_v \mathbf{e} \quad \text{dove } \underline{E}_v \text{ è l'espressione simbolica, } \mathbf{e} \text{ è il fattore di scala avente unità di misura [V/m]}$$

$$\underline{H} = \underline{H}_v \mathbf{h} \quad \text{dove } \underline{H}_v \text{ è l'espressione simbolica, } \mathbf{h} \text{ è il fattore di scala avente unità di misura [A/m]}$$

$$\underline{r} = \underline{r}_v \mathbf{l} \quad \text{dove } \underline{r}_v \text{ è l'espressione simbolica, } \mathbf{l} \text{ è il fattore di scala avente unità di misura [m]}$$

Sostituendo nelle equazioni di Maxwell, otteniamo:

$$\nabla \times \underline{E}_v = (-j\omega\mu \underline{H}_v \mathbf{h} \mathbf{l})/\mathbf{e}$$

$$\nabla \times \underline{H}_v = (j\omega\varepsilon \underline{E}_v \mathbf{e} \mathbf{l})/\mathbf{h}$$

La stessa soluzione è ottenuta se rimangono inalterati i seguenti rapporti:

$$(\omega \mu \mathbf{h} \mathbf{l}) / \mathbf{e} = \text{cost.}$$

$$(\omega \varepsilon \mathbf{e} \mathbf{l}) / \mathbf{h} = \text{cost.}$$

cioè:

$$\omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{l}^2 = \text{cost.}$$

*Note:*

- In un mezzo privo di perdite, se il fattore di scala geometrico  $\mathbf{l}$  si dimezza, la frequenza deve raddoppiare;
- Nel caso di mezzi dissipativi con sole **perdite per conduzione**,  $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$  con  $\varepsilon'' = \sigma/\omega$ . Si ottiene che le proprietà elettromagnetiche della struttura in esame restano invariate solo se:

$$\omega^2 \epsilon' \mu P = \text{cost.} \quad \& \quad \omega \sigma \mu P = \text{cost.}$$

il che implica che occorre variare anche le caratteristiche del mezzo quando si effettua lo scalamento geometrico.

### 2.3.f Teorema di Babinet

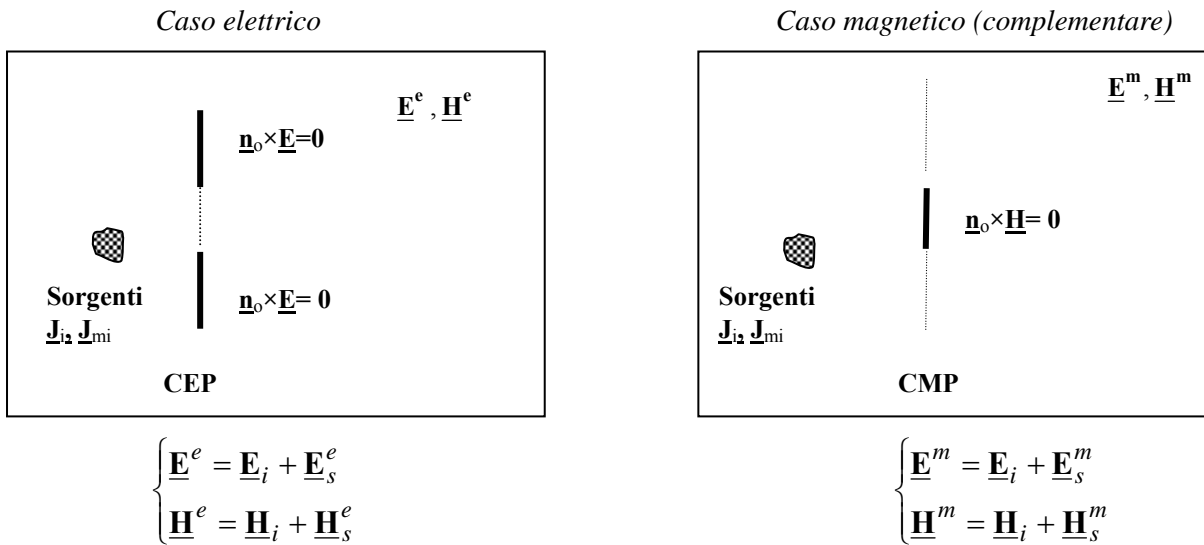
- Il teo. di Babinet consente di ricavare la soluzione di un problema di diffrazione da una struttura, nota la soluzione del problema duale attraverso l'analisi di strutture complementari;
- Esso trova applicazione per es. nell'analisi di antenne a fessura e antenne a microstriscia, le quali si possono ricondurre a sorgenti complementari.

#### ➤ Analisi di schermi complementari

Consideriamo i seguenti 2 casi “complementari”:

1. apertura in piano CEP su  $z=0$  (*caso elettrico*)
2. piastra CMP in piano vuoto su  $z=0$  (*caso magnetico*)

di forma identica e investiti dal campo generato da una distribuzione di sorgenti  $\underline{J}$ ,  $\underline{J}_m$ , identiche nei due casi, poste in uno dei due semispazi (nella figura, a sinistra del piano  $z=0$ ).



dove

- il campo totale  $\underline{E}$ ,  $\underline{H}$ , nel semispazio non occupato dalle sorgenti (a destra in figura), viene distinto in campo incidente  $\underline{E}_i$ ,  $\underline{H}_i$  (campo presente in assenza di schermo e generato dalle sorgenti impresse  $\underline{J}_i$ ,  $\underline{J}_{mi}$ ) e campo diffuso  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{H}_s$  (campo indotto dalla presenza dello schermo);
- il campo totale  $\underline{E}$ ,  $\underline{H}$  viene distinto tra caso elettrico (apertura in piano CEP) e caso magnetico (piastra CMP in piano vuoto) attraverso un apice “e” e “m”, rispettivamente.

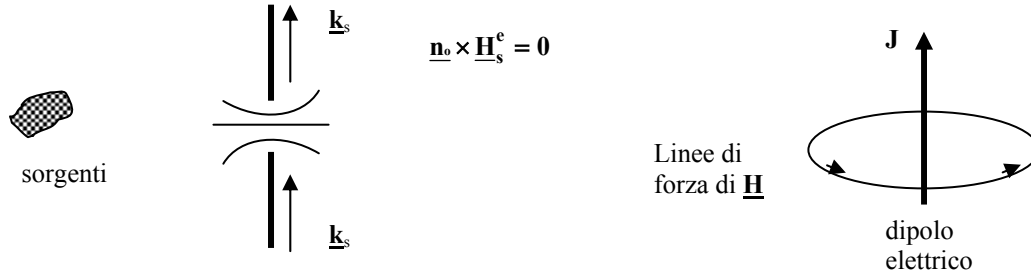
#### ➤ Condizioni al contorno

*Caso elettrico.*

- Sulla superficie CEP, la componente tangenziale di  $\underline{E}^e$  sarà nulla, ovvero  $\underline{k}_m = -\underline{n}_0 \times \underline{E}^e = 0$ .

- Sull'apertura, le correnti elettriche indotte dal campo incidente  $\underline{E}_i$  sullo schermo generano un campo magnetico diffuso  $\underline{H}_s^e$  le cui linee di forza sono comunque ortogonali al piano di apertura:  $\underline{n}_o \times \underline{H}_s^e = 0$ .

$$\text{Caso elettrico} \quad \begin{cases} \text{piano CEP: } \underline{k}_m = -\underline{n}_o \times \underline{E}^e = 0 \\ \text{apertura: } \underline{n}_o \times \underline{H}_s^e = 0 \rightarrow \underline{n}_o \times \underline{H}^e = \underline{n}_o \times \underline{H}_i \end{cases} \quad \text{su } z=0$$



*Caso magnetico.*

- Sulla piastra CMP, la componente tangenziale di  $\underline{H}^m$  sarà nulla, ovvero  $\underline{k} = \underline{n}_o \times \underline{H}^m = 0$  (duale del precedente).
- Sul piano vuoto, le correnti magnetiche indotte dal campo incidente sullo schermo generano un campo elettrico diffuso  $\underline{E}_s^m$  le cui linee di forza sono comunque ortogonali al piano di apertura, ovvero:  $\underline{n}_o \times \underline{E}_s^m = 0$ .

$$\text{Caso magnetico} \quad \begin{cases} \text{piastra CMP: } \underline{k} = \underline{n}_o \times \underline{H}^m = 0 \\ \text{piano vuoto: } \underline{n}_o \times \underline{E}_s^m = 0 \rightarrow \underline{n}_o \times \underline{E}^m = \underline{n}_o \times \underline{E}_i \end{cases} \quad \text{su } z=0$$

- Per la linearità delle eq. di Maxwell e del mezzo, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti sommando i campi  $\underline{E}^e$ ,  $\underline{H}^e$  e  $\underline{E}^m$ ,  $\underline{H}^m$  generati nei due casi e, quindi, le rispettive condizioni al contorno sul piano  $z=0$ , ottenendo:

$$\begin{array}{c} \text{piano} \\ \text{apertura/piastra} \\ \text{piano} \end{array} \quad \begin{cases} \underline{n}_o \times (\underline{E}^e + \underline{E}^m) = \underline{n}_o \times \underline{E}_i \\ \underline{n}_o \times (\underline{H}^e + \underline{H}^m) = \underline{n}_o \times \underline{H}_i \\ \underline{n}_o \times (\underline{E}^e + \underline{E}^m) = \underline{n}_o \times \underline{E}_i \end{cases} \quad \text{su } z=0$$

- Per il teo. di unicità, assegnate le componenti tangenziali dei campi sul piano  $z=0$  (alternativamente campo  $\underline{H}$  sull'apertura, ovvero sulla piastra CMP e campo  $\underline{E}$  al di fuori) e le condizioni di radiazione sulla sfera all'infinito, la soluzione seguente:

$$\begin{aligned} \underline{E}^e + \underline{E}^m &= \underline{E}_i \\ \underline{H}^e + \underline{H}^m &= \underline{H}_i \end{aligned}$$

è unica nel semispazio  $z \geq 0$  (nella figura, a destra del piano).

- Nota la soluzione del caso elettrico e visto che i campi incidenti sono noti e identici nei due casi, la soluzione del caso magnetico "complementare" è ricavabile dall'eguaglianza precedente, ovvero:

$$\underline{\mathbf{E}}^m = \underline{\mathbf{E}}_i - \underline{\mathbf{E}}^e$$

$$\underline{\mathbf{H}}^m = \underline{\mathbf{H}}_i - \underline{\mathbf{H}}^e$$

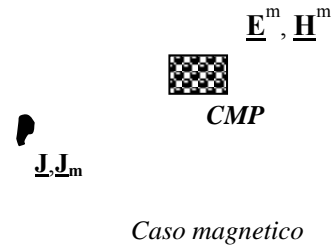
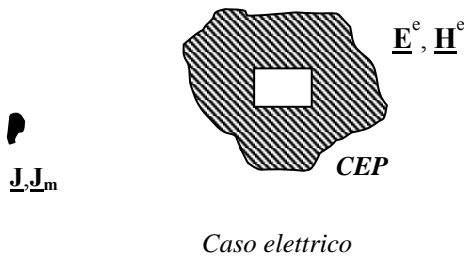
- La piastra CMP non è, evidentemente, di interesse nelle applicazioni pratiche. Allora, consideriamo il **problema duale** del caso magnetico, ovvero una piastra CEP (illuminata da sorgenti magnetiche).

Applicando il teo. di dualità al campo  $\underline{\mathbf{E}}^m, \underline{\mathbf{H}}^m$  e indicando con  $\underline{\mathbf{E}}^d, \underline{\mathbf{H}}^d$  la soluzione duale risultante si ha:

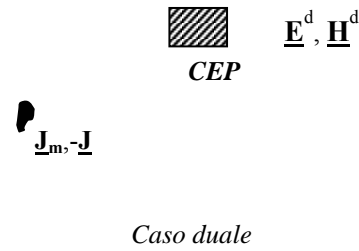
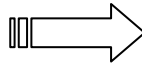
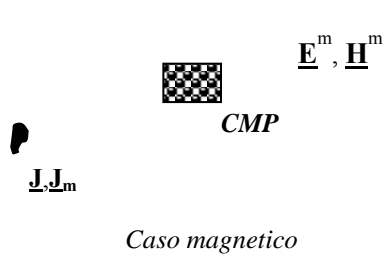
$$\underline{\mathbf{H}}^d = \underline{\mathbf{E}}_i - \underline{\mathbf{E}}^e$$

$$\underline{\mathbf{E}}^d = -(\underline{\mathbf{H}}_i - \underline{\mathbf{H}}^e)$$

Dal punto vista schematico, la soluzione è così rappresentabile:



che per dualità diventa:



#### Note

- Si consideri che passando dal caso magnetico al **caso duale**, occorre trasformare, oltre che sorgenti impresse da  $\underline{\mathbf{J}}$  a  $\underline{\mathbf{J}}_m$  e da  $\underline{\mathbf{J}}_m$  a  $-\underline{\mathbf{J}}$ , anche le costanti primarie del mezzo  $\mu, \epsilon$  e  $\sigma$ : ciò spiega l'apparente incongruenza nelle dimensioni della formula precedente.
- Attraverso il teorema di Babinet, si realizza una trasformazione dei campi stabilendo una **similitudine tra antenne** a struttura diversa, idealmente tra antenna ad apertura e antenne a piastrina (*patch*). Le impedenze di ingresso delle 2 antenne saranno, in generale, differenti.