

1. FONDAMENTI DI ANTENNE

1.1 CONCETTO DI ANTENNA

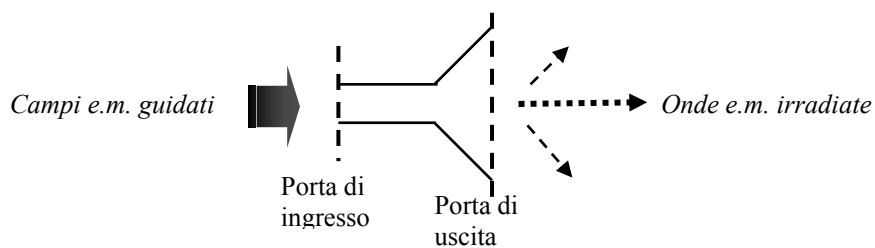
1.1.a Definizioni di antenna

Antenna Dizionario Zingarelli: [latino *antenna*(m), probabilmente dal greco *anatithemi* (io pongo sopra)]: “Dispositivo atto a irradiare o a captare onde elettromagnetiche”.
Dizionario Webster: “A usually metallic device (as a rod or wire) for radiating or receiving radiowaves”.

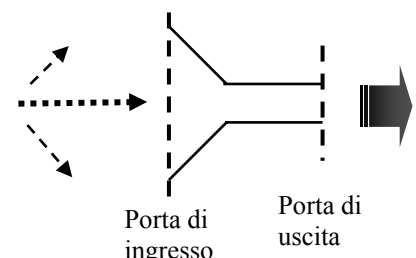
Antenna IEEE (Institute of Electrical and Electronic Engineers) *Standard definitions of Terms for Antenna Std 145-1973* [Trans. Antennas and Propagat., vol. 22, n. 1, 1974]: “A mean for radiating or receiving radio waves”.
Nel seguito le definizioni di parametri di antenna tra apici si riferiranno alla fonte IEEE Std 145-1973.

Antenna: trasduttore elettromagnetico (e.m.), ovvero interfaccia tra campi e.m. guidati (e.g., tramite conduttori, cavi, guide d'onda, guide dielettriche, microstriscie) fino alla porta d'ingresso (e.g., morsetti, flangia, superficie ideale) e radiazione e.m. irradiata attraverso la porta di uscita (e.g., filo, struttura di conduttori, bocca, superficie ideale) nello spazio esterno tramite onde e.m..

Oltre a caratteristiche rice-trasmettenti, l'antenna ha anche proprietà di direzionalità: amplificazione della radiazione e.m. in alcune direzione e riduzione della stessa in altre.



Antenna in trasmissione



Antenna in ricezione

1.1.b Elementi di storia delle antenne

Era dei fondamenti (pre-Hertz)

- 1663: il matematico scozzese J. Gregory propone il primo telescopio ottico a riflettore sferico, costruito da I. Newton nel 1672.
- 1672: l'astronomo francese G. Cassegrain propone l'uso di un telescopio ottico a doppio riflettore.
- 1862: J.C. **Maxwell** ipotizza che “la luce sia un'onda e.m. generata dalle variazioni del campo elettrico e magnetico”.

Era della sperimentazione (di Hertz)

- 1887: esperimento di H. **Hertz** con generatore a dipolo terminato con sfere; descrizione teorica del dipolo elementare (hertziano).
- 1893: esperimenti a microonde di J. Bose, J. Fleming e A. Righi con antenne a fessura, a tromba e con lente.
- 1897: Lord **Rayleigh** (J. Strutt) risolve il problema di radiazione e.m. da piccole aperture a partire dalle eq. di Maxwell.

Era delle antenne lineari e radiopropagazione (di Marconi)

- 1896: brevetto di G. **Marconi** sull'invenzione di antenna a riflettore parabolico cilindrico (a griglia di conduttori).
- 1900: esperimenti di A. Popoff mediante monopoli, ovvero antenne filiformi elevate sul terreno.

- 1901: trasmissione transatlantica di G. Marconi (29.1.1901) con allineamento lungo 60 m sospeso a 48 m di altezza con 50 dipoli.
- 1905: antenne lineari direttive (dipoli orizzontali lunghi), proposte da G. Marconi e spiegate matematicamente da J. Fleming.
- 1909: A. **Sommerfeld** affronta teoricamente il problema della radiazione e.m. di dipolo verticale in prossimità del suolo.
- 1923: H. Beverage propone l'antenna lineare a onda progressiva.
- 1926: S. Uda propone un allineamento passivo di dipoli, divulgato da H. Yagi e noto in seguito col nome di **antenna Yagi-Uda**.
- 1931: E. Bruce, ricercatore dei Bell Labs, propone l'**antenna lineare rombica** a larga banda.
- 1932: K. Jansky rivela campi elettrici di origine extra-terrestre mediante allineamenti, dando inizio alla **radio-astronomia**.
- 1932: teoria delle antenne lineari sottili, sviluppata da P. Carter, G. Brown, P. Riazin e R. King.
- 1938: E. **Hallen** ricava le equazioni per il calcolo della radiazione da dipoli cilindrici come problema di condizioni al contorno.
- 1939: A. Southworth e S. Silver introducono le **antenne a tromba** come illuminatori direttivi di riflettori.
- 1939: A. **Stratton** e L. **Chu** ricavano e formulano la teoria della diffrazione di onde e.m. in termini di sorgenti.
- 1941: teoria approssimata delle antenne lineari di geometria qualsiasi sviluppata da S. **Schelkunoff**; modello di antenna biconica.
- 1947: P. Woodward e J. Lawson propongono **metodi di sintesi** (progettazione) del diagramma di radiazione di antenne.

Era delle antenne ad apertura e propagazione a microonde

- 1946: H. **Friis** propone una formulazione per il collegamento tra antenne in visibilità a grande distanza.
- 1947: collegamento sperimentale a microonde tra New York e Boston mediante antenne a tromba schermate
- 1949: S. Silver raccoglie i contributi del **MIT Radiation Labs** sulla teoria di antenne ad apertura per applicazioni a microonde.
- 1950: H. Booker and P. Clemmow, con J. Ramsay nel 1947, ricavano il campo irradiato da aperture via **trasformata di Fourier**.
- 1950: E. Jordan espone metodi di sintesi di antenne mediante metodo della trasformata inversa di Fourier.
- 1953: H. Deschamp introduce l'**antenna a microstriscia**, che diverrà di enorme importanza tecnologica dopo gli anni '80.
- 1955: T. Taylor estende il metodo di sintesi di allineamenti simmetrici proposto da C. **Dolph** nel 1946.
- 1956: la US Navy realizza un collegamento spaziale tra Washington e Hawaii a 430 MHz usando la luna come ripetitore passivo.
- 1957: V. Rumsey introduce il concetto di **antenne frequenza-indipendenti**, fondamento per l'antenna a spirale e log-periodica.
- 1957: B. Lovell realizza un'antenna a riflettore di 80 m di diametro presso Jodrell Bank per uso radio-astronomico.
- 1959: H. Ryle e B. Hewish sviluppano il concetto di **sintesi di apertura**, realizzando un'allineamento prototipale a Cambridge.
- 1962: J. Keller espone la **teoria geometrica della diffrazione** per l'analisi del diagramma di radiazioni di antenne a riflettore.

Era dei metodi numerici e applicazioni spaziali

- 1962: il satellite **TELSTAR** (sfera di 87 cm) dei Bell Labs per trasmissioni trans-atlantiche impiega antenne in guida fessurata.
- 1963: D. Kay introduce l'**antenna a tromba piramidale corrugata** per ridurre la de-polarizzazione su larga banda di illumin.
- 1965: **INTELSAT-1** (Early Bird) è il primo satellite operativo geostazionario utilizzando allineamenti in guida fessurata.
- 1966: K. Yee introduce il metodo delle **differenze finite nel dominio del tempo** (FDTD) per la soluzione di problemi e.m.
- 1966: J. Butler introduce le matrici formatrici di fascio nell'alimentazione di allineamenti, note come **matrici di Butler**.
- 1967: R. Harrington espone il **metodo dei momenti** (MoM), basato sul concetto di reazione introdotto da V. Rumsey nel 1954.
- 1971: **INTELSAT-IV** sperimenta antenne a riflettore de-ruotanti (despinning) estendibili a polarizzazione circolare incrociata.
- 1984: P. Clarricoats riassume i metodi di sintesi di antenne a riflettore con fascio sagomato per applicazioni spaziali.
- 1984: K. Barton riassume gli sviluppi della progettazione di antenne nelle applicazioni radar.
- la storia continua.

1.2 TIPOLOGIE DI ANTENNE

1.2.a Bande di frequenza

- Relazione fondamentale: $f=c/\lambda$ [Hz]
ove f è la frequenza, λ la lunghezza d'onda e $c=3 \cdot 10^8$ m/s la velocità della luce nel vuoto.
- Ogni banda spettrale è assegnata a livello internazionale e, compatibilmente, a livello nazionale per usi e servizi specifici (e.g., sistemi di telecomunicazioni, di telerilevamento, di localizzazione, di radio-diffusione) al fine di evitare interferenze e.m.

<i>Banda di frequenza</i>	<i>Lunghezza d'onda</i>	<i>Designazione</i>	<i>Servizi e applicazioni tipiche</i>
3-30 Hz	100-10 Mm	ELF (Extremely Low Frequency)	Sondaggi magnetotellurici della struttura della terra
30-300 Hz	10-1 Mm	SLF (Super Low Frequency)	Rivelazione di oggetti metallici sotterrati, distribuzione di potenza elettrica
300-3000 Hz	1-0.1 Mm	ULF (Ultra Low Frequency)	Sondaggi ionosferici, comunicazioni sottomarine
3-30 kHz	100-10 km	VLF (Very Low Frequency)	Segnali audio di telefonia
30-300 kHz	10-1 km	LF (Low Frequency)	Localizzazione geografica e radio-navigazione
300-3000 kHz	1-0.1 km	MF (Medium Frequency)	Radiodiffusione a modulazione di ampiezza (AM)
3-30 MHz	100-10 m	HF (High Frequency)	Radiodiffusione a onde corte
30-300 MHz	10-1 m	VHF (Very High Frequency)	Radiodiffusione di segnali televisivi e a modulazione di frequenza (FM), radio-comunicazioni mobili, controllo traffico aereo
300-3000 MHz	1-0.1 m	UHF (Ultra High Frequency)	Radiodiffusione di segnali televisivi, sistemi radar radio-astronomia, forni a microonde, telefonia cellulare
3-30 GHz	10-1 cm	SHF (Super High Frequency)	Sistemi radar, sistemi di telecomunicazioni via satellite, sistemi di localizzazione geografica satellitare (GPS), radio-navigazione aerea, radio-astronomia, telerilevamento ambientale a microonde, applicazioni bio-medicali
30-300 GHz	1-0.1 cm	EHF (Extremely High Frequency)	Sistemi radar, sistemi di telecomunicazioni via satellite avanzati, radio-astronomia, telerilevamento ambientale a onde millimetriche

- Nella regione delle microonde, si adotta in genere una designazione più dettagliata indicata nel seguito.

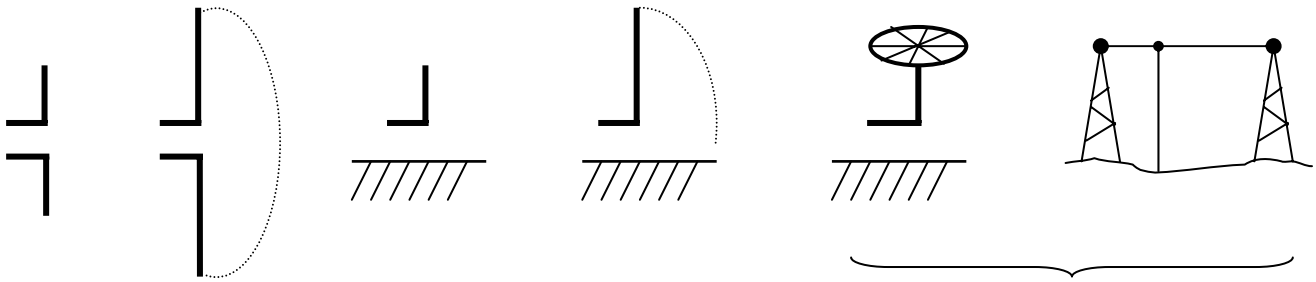
<i>Banda di frequenza a microonde</i>	<i>Designazione vecchia (ancora in uso)</i>	<i>Designazione nuova (non ancora in uso)</i>
500-1000 MHz	P	C
1-2 GHz	L	D
2-3 GHz	S	E
3-4 GHz	S	F
4-6 GHz	C	G
6-8 GHz	C	H
8-10 GHz	X	I
10-12.4 GHz	X	J
12.4-18 GHz	Ku	J
18-20 GHz	K	J
20-26.5 GHz	K	K
26.5-40 GHz	Ka	K
40-90 GHz	W	W

- Si ricordi che, oltre lo spettro delle radio-frequenze ELF-EHF, le applicazioni delle onde e.m. per scopi di telecomunicazioni, telerilevamento e applicazioni bio-medicali e di diagnostica si realizzano anche nello:
 - **spettro dell'Infrarosso:** $\lambda=0.8-15\ \mu\text{m}$ (infrarosso vicino, medio, termico, lontano)
 - **spettro del Visibile:** $\lambda=0.3-0.7\ \mu\text{m}$ (violetto, indaco, azzurro, verde, giallo, arancione, rosso)
 - **spettro dell'Ultravioletto:** $\lambda=1-300\ \text{nm}$
 - **spettro dei raggi X:** $\lambda=1-1000\ \text{pm}$
 - **spettro dei raggi Gamma:** $\lambda<1\ \text{pm}$

1.2.b Panoramica su tipologie di antenne

- Classificazione dei tipi di antenne secondo la loro struttura e configurazione:
 1. **Antenne lineari:** antenne la cui struttura è di tipo filiforme, in generale di spessore finito (sottile) e a geometria variabile (rettilinea e non).
Es.: dipoli, spire, monopoli, antenne Beverage, antenna rombica, antenna a elica, antenna biconica, antenna a farfalla.
 2. **Antenne ad apertura:** antenne la cui struttura presenta una porzione di superficie piana (bocca) attraverso la quale avviene l'irradiazione di onde e.m. (tale bocca può essere rappresentata anche da una superficie dielettrica, come nelle antenne a lente).
Es.: antenna a guida troncata, antenna a tromba, microstriscia.
 3. **Antenne a riflettore:** antenne che presentano un illuminatore (e.g., antenne ad apertura) che irradia verso uno o più riflettori metallici, avente caratteristiche di irradiazione e.m. altamente direttive.
Es.: antenna a riflettore parabolico, antenna a riflettore angolare, antenna a riflettore fuori-asse, antenna a doppio riflettore di tipo Cassegrain.
 4. **Allineamenti di ant.:** configurazioni mono o bi-dimensionali di antenne (dette primarie, di tipo lineare o ad apertura) alimentate con opportuna distribuzione di ampiezza e fase, avente caratteristiche di irradiazione e.m. altamente direttive e facilmente riconfigurabili.
Es.: allineamento mono e bi-dimensionali a dipoli risonanti, allineamento mono e bi-dimensionali in guida fessurata, allineamento a microstriscia, allineamento di tipo log-periodico, allineamento di tipo Yagi-Uda, allineamento mono e bi-dimensionale con antenne primarie "attive".

Esempi di Antenne lineari



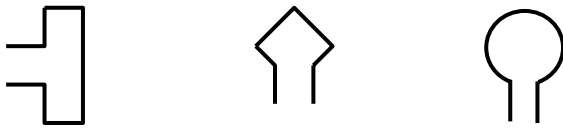
Dipolo Corto

Dipolo $\lambda/2$

Monopolo corto

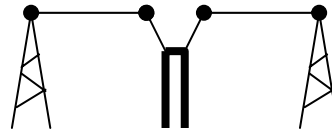
Monopolo $\lambda/2$

Monopoli "allungati"

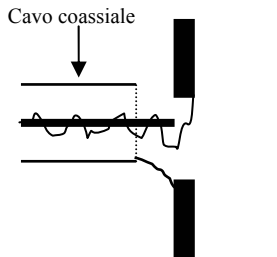


Dipolo ripiegato

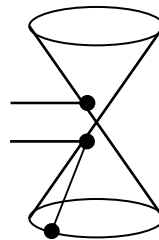
Telai ad una o più spire



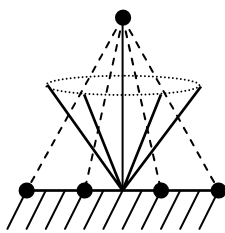
Antenna filiforme orizzontale



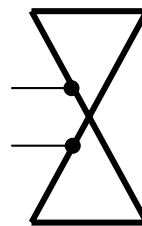
Dipolo cilindrico (non sottile)



Antenna Biconica



Antenna a nassa

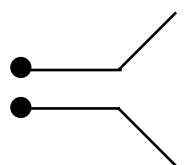


Dipolo a farfalla

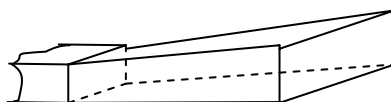
Note

- Si ricordi che ogni grandezza elettromagnetica va comparata alla lunghezza d'onda, per cui un dipolo si dice corto quando la sua lunghezza è piccola rispetto alla lunghezza d'onda (si veda la tabella delle Bande di Frequenza).
- Nel caso dei monopoli, la terra è la sede della cosiddetta "immagine di antenna", cioè rappresenta il secondo polo dell'antenna.
- Nel caso di monopoli "allungati", il cerchio di conduttori (con i relativi raggi) e il filo orizzontale rappresentano capacità terminali che 'allungano' elettricamente l'antenna (la sua distribuzione di corrente).
- Dipoli, monopoli e spire hanno applicazioni predominanti nelle bande VLF-HF.
- Il dipolo cilindrico, l'antenna biconica, l'antenna a nassa e il dipolo a farfalla consentono un allargamento della banda di lavoro dell'antenna (transizione di banda VHF-UHF).

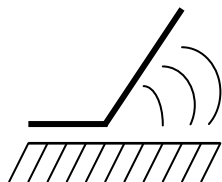
Esempi di Antenne ad apertura



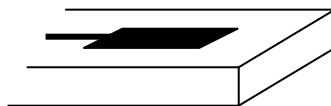
Dipolo obliquo a V



Antenna a tromba



Antenna a onda superficiale

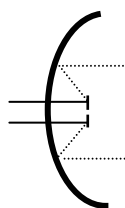


Antenna a microstriscia

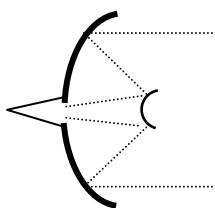
Note

- L'apertura rappresenta la transizione tra campo in linee di trasmissione e strutture guidanti e lo spazio esterno.
- Tali antenne ad apertura vengono utilizzate a microonde sia come antenne che come illuminatori di riflettori.
- Le antenna a microstriscia hanno caratteristiche di dimensione, peso, costo e facilità di integrazione in circuiti stampati che le rendono ideali per applicazioni aereo-spaziali, pur avendo bassa efficienza e banda stretta di lavoro.

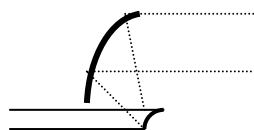
Esempi di Antenne a riflettore



Riflettore paraboloid



Antenna Cassegrain a doppio riflettore

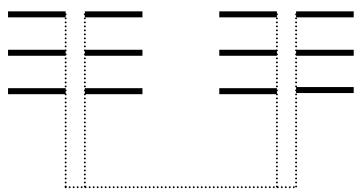


Riflettore paraboloid fuori-asse (off-set)

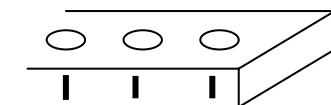
Note

- L'antenna Cassegrain risolve problemi di bloccaggio della radiazione e.m. da parte dell'illuminatore.
- Il riflettore paraboloid fuori-asse (eventualmente sagomato) è una soluzione anti-bloccaggio dell'illuminatore, usata nelle applicazioni spaziali.

Esempi di Allineamenti di antenne



Allineamento bi-dimensionale di dipoli



Allineamento a guida fessurata

Note

- Il numero di antenne dell'allineamento, nonché la loro eccitazione in ampiezza e fase, consente una sagomatura del fascio.
- La rete (o matrice) di alimentazione dell'allineamento consente di orientare il fascio mediante controllo di fase.

1.3 CAMPI E.M. IRRADIATI DA ANTENNE

1.3.a Campi a grande distanza e regioni di campo

➤ Campo e.m. a grande distanza

- Adottiamo la **notazione dei vettori complessi** per rappresentare campi e.m. a componenti monocromatiche variabili sinusoidalmente nel tempo con frequenza f_0 [Hz] (ovvero pulsazione $\omega_0 = 2\pi f_0$):

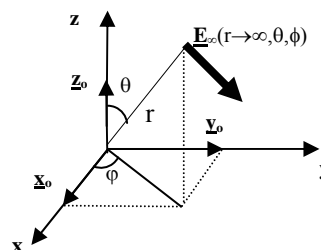
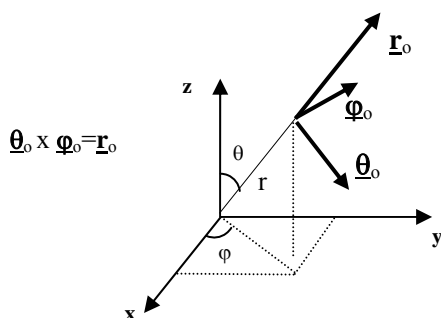
$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \equiv \text{Re}\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_0) e^{-j\omega_0 t} \} \quad [\text{V/m}]$$

ove \mathbf{r} è il vettore posizione e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_0)$ è il vettore complesso rappresentativo nel dominio della frequenza.

- Consideriamo il **campo e.m. irradiato a grande distanza** dall'antenna (ovvero a distanze molto maggiori della dimensione massima dell'antenna e della lunghezza d'onda di lavoro, come vedremo in seguito)
- In **coordinate sferiche** (r, θ, φ) con sistema dei versori fondamentali $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$ e notazione complessa, il campo e.m. a grande distanza è rappresentato dal vettore complesso:

$$\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}_\infty(r, \theta, \varphi) \equiv \mathbf{E}(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi, \omega_0) \quad [\text{V/m}]$$

originato da un'antenna posta nell'origine del sistema di riferimento come in figura.



Note:

- In **coordinate cartesiane** (x, y, z) con sistema dei versori fondamentali $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ è $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{x}_0 + y \cdot \mathbf{y}_0 + z \cdot \mathbf{z}_0$;
- In **coordinate sferiche** (r, θ, φ) è $\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{x}_0 + r \sin \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{y}_0 + r \cos \theta \cdot \mathbf{z}_0$

➤ Regioni di campo di un'antenna

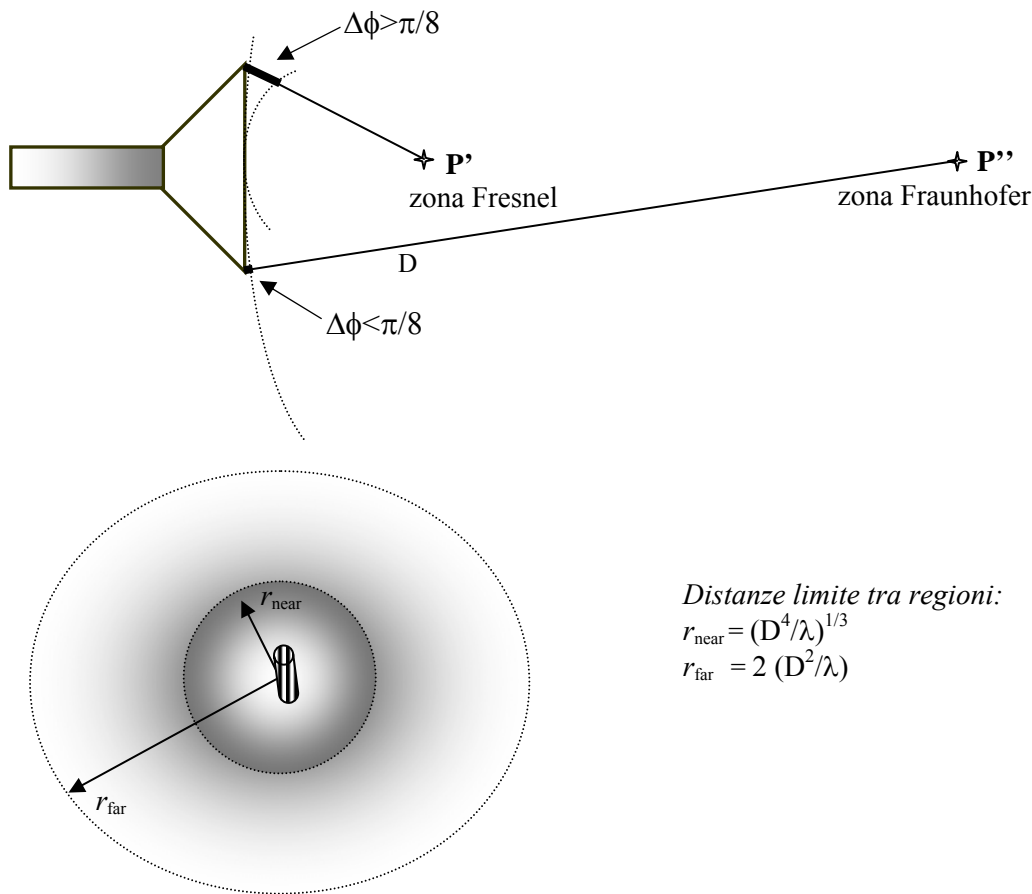
Sia D la dimensione massima dell'antenna (per es., la diagonale nel caso di aperture) tale che $D > \lambda$.

Dimostreremo che:

1. Regione di campo vicino reattivo:

“regione del campo immediatamente circostante l'antenna in cui prevalgono i campi reattivi”. Nel bilancio energetico prevalgono i termini di potenza elettrica e magnetica immagazzinata nelle vicinanze dell'antenna.

2. *Regione di campo vicino (radiativo di Fresnel):* $2 (D^2/\lambda) > r$
 “regione del campo di un’antenna tra la regione di campo reattivo e di campo lontano dove i campi di radiazione predominano e la distribuzione angolare del campo è dipendente dalla distanza dall’antenna. Se l’antenna ha una dimensione massima molto più piccola della lunghezza d’onda, tale regione può non esistere”. La condizione di limite superiore su r si ottiene imponendo che i termini quadratici dello sfasamento $\Delta\Phi$ del campo irradiato (rispetto al centro di fase dell’antenna) siano pari a $\pi/8$.
3. *Regione di campo lontano (radiativo di Fraunhofer):* $r > 2 (D^2/\lambda)$
 “regione del campo di un’antenna dove la distribuzione angolare del campo è essenzialmente indipendente dalla distanza dall’antenna”. In tale regione sia il campo elettrico che quello magnetico non hanno componenti radiali e le loro ampiezze variano come $1/r$, mentre le differenze di fase $\Delta\Phi$ (rispetto al centro di fase dell’antenna) sono minori di $\pi/8$. Il confine superiore di questa regione in spazio libero è rappresentato dal raggio della sfera all’infinito.



➤ Caratteristiche del campo irradiato a grande distanza dall’antenna

- Dimostreremo che il campo elettrico \underline{E}_∞ e magnetico \underline{H}_∞ si propagano come un’onda sferica che nella direzione di propagazione può essere localmente rappresentata come un’onda piana e uniforme (trasversa elettromagnetica: TEM rispetto alla direzione di propagazione radiale \underline{r}_0);
- le superfici equifase del campo irradiato sono superfici sferiche con centro nell’origine (ove si individua il *centro di fase* dell’antenna) e la direzione di propagazione è radiale secondo \underline{r}_0 .
- il campo elettrico \underline{E}_∞ e campo magnetico \underline{H}_∞ sono tra loro perpendicolari in ogni istante alla direzione radiale \underline{r}_0 ed hanno componenti (E_θ, E_ϕ) e (H_θ, H_ϕ) , rispettivamente;
- i moduli di \underline{E}_∞ e \underline{H}_∞ decrescono con la distanza come $1/r$ e sono in rapporto costante, pari all’impedenza caratteristica del mezzo $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ($\eta = 377 \Omega$ nel vuoto);
- il campo \underline{E}_∞ è in fase con \underline{H}_∞ , ovvero i campi presentano massimi, minimi e zeri nello stesso istante;
- l’onda TEM è polarizzata ellitticamente sul piano trasverso, perpendicolare a \underline{r}_0 ;

1.3.b Densità di potenza, intensità di radiazione e potenza irradiata

➤ Densità di potenza

In virtù delle proprietà di onda piana localmente uniforme segue che dall'espressione del vettore di Poynting $\underline{P}_\infty(r, \theta, \phi) = \underline{P}(r \rightarrow \infty, \theta, \phi)$ nel dominio della frequenza, a grande distanza dall'antenna si ha:

$$\underline{P}_\infty(r, \theta, \phi) \equiv \frac{1}{2} \underline{E}_\infty(r, \theta, \phi) \times \underline{H}_\infty^*(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2\eta} |\underline{E}_\infty(r, \theta, \phi)|^2 \underline{r}_o \quad [\text{W/m}^2]$$

ove $\underline{E}_\infty(r, \theta, \phi)$: $\underline{H}_\infty(r, \theta, \phi)$: campo elettrico [V/m] e magnetico [A/m] irradiati dall'antenna a grande distanza
 $|\underline{P}_\infty(r, \theta, \phi)|$: densità di potenza [W/m²] irradiata dall'antenna attraverso una superficie ortogonale alla direzione di propagazione \underline{r}_o .
 $\text{Re}[\underline{P}_\infty(r, \theta, \phi)]$: valore medio nel periodo della densità di potenza irradiata (ipotesi di campi monocromatici)

Note:

- il vettore di Poynting \underline{P}_∞ risulta diretto radialmente, cioè ortogonale alle superfici equifase del campo;
- il vettore di Poynting \underline{P}_∞ è puramente reale in un mezzo non dissipativo.

➤ Potenza trasmessa (irradiata)

Se $P_\infty(r, \theta, \phi) = |\underline{P}_\infty(r, \theta, \phi)|$, il flusso del vettore di Poynting attraverso una sfera di raggio r , con centro nell'origine e normale $\underline{n}_o = \underline{r}_o$ all'elemento di superficie dS , rappresenta la potenza trasmessa (o irradiata) dall'antenna data da:

$$W_T \equiv \oint_S \underline{P}_\infty(r, \theta, \phi) \cdot \underline{n}_o dS = \oint_S P_\infty(r, \theta, \phi) dS \quad [\text{W}]$$

ove W_T : **potenza trasmessa (irradiata)** [W] dall'antenna.

➤ Intensità di radiazione

Se $P_\infty(r, \theta, \phi) = |\underline{P}_\infty(r, \theta, \phi)|$, si definisce a grande distanza dall'antenna:

$$U(\theta, \phi) \equiv r^2 P_\infty(r, \theta, \phi) \quad [\text{W/sr}]$$

ove $U(\theta, \phi)$: **intensità di radiazione** [W/sr] irradiata dall'antenna (o diagramma di radiazione in potenza).

$U(\theta, \phi)$ rappresenta la potenza per unità di angolo solido [W/sr] trasmessa (irradiata) dall'antenna nell'intorno della direzione θ, ϕ . Infatti la espressione di W_T trasmessa diviene:

$$W_T = \oint_S P_\infty(r, \theta, \phi) dS = \oint_S \frac{U(\theta, \phi)}{r^2} dS = \int_{4\pi} U(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \quad [\text{W}]$$

Note

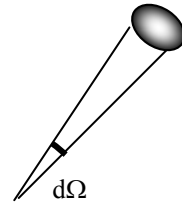
- L'intensità di radiazione non dipende dalla distanza r poiché a grande distanza la densità di potenza irradiata varia in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Si noti che ciò non è più vero in campo;
- Lo steradiano è la misura dell'angolo solido (come il radiante è la misura dell'angolo piano);

- In coordinate sferiche, l'elemento infinitesimo di superficie dS di una sfera di raggio r è:

$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

- L'elemento di angolo solido $d\Omega$ di una sfera che sottende l'area dS è:

$$d\Omega \equiv dS / r^2 = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad [\text{sr}]$$



- L'integrale di $d\Omega$ sull'intero angolo solido è pari a 4π .

- $U(\theta, \phi)$ caratterizza le proprietà direzionali dell'antenna:

+ *Antenne isotropica*:

“antenna ipotetica avente uguale radiazione in tutte le direzioni.”

Un'antenna puntiforme è un'antenna isotropica non fisicamente realizzabile la cui intensità di radiazione U_{iso} non dipende dalla direzione.

$$U(\theta, \varphi) = U_{iso} = r^2 P_{\infty iso}$$

$$W_T = \int_{4\pi} U_{iso} d\Omega = P_{\infty iso} r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = P_{\infty iso} r^2 4\pi$$

+ *Antenna direzionale*:

“antenna avente la proprietà di irradiare e ricevere onde e.m. in modo più efficace in alcune direzioni piuttosto che in altre”.

+ *Antenna omni-direzionale*:

“antenna avente proprietà radiative non direzionali sul piano azimutale ($\theta=90^\circ$, φ variabile) e direzionali su piani di elevazione ($\varphi=\text{cost}$, θ variabile). Es.: dipolo.

1.4 PARAMETRI DI ANTENNE IN TRASMISSIONE

Riassumendo:

- A grande distanza un'antenna irradia una onda sferica localmente piana;
- L'ampiezza del campo $E_\infty(r, \theta, \phi)$ [V/m] decresce come $1/r$ e l'intensità del vettore di Poynting $P_\infty(r, \theta, \phi)$ [W/m²] come $1/r^2$;
- Le caratteristiche di polarizzazione dell'antenna sono rappresentate da quelle del campo irradiato;
- Le caratteristiche dell'antenna di irradiare potenza nelle diverse direzioni sono descritte dalla intensità di radiazione $U(\theta, \phi)$ (funzione della direzione θ, ϕ ma indipendente dalla distanza r), legata al modulo del vettore di Poynting dalla relazione:

$$U(\theta, \phi) \equiv r^2 P_\infty(r, \theta, \phi)$$

1.4.a Solido e diagramma di radiazione

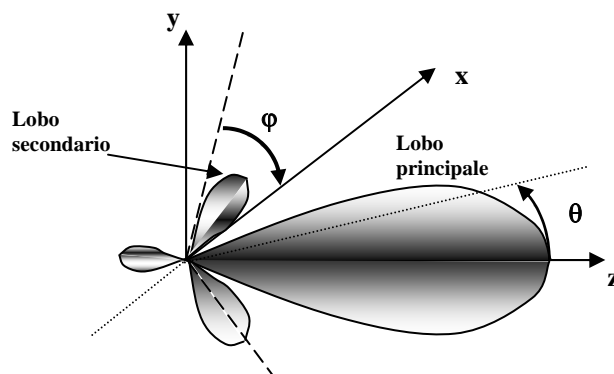
➤ **Solido di radiazione** (“*radiation pattern*”):

“rappresentazione grafica tridimensionale delle proprietà di radiazione (intensità di radiazione, ampiezza, fase o polarizzazione del campo) dell'antenna in funzione delle coordinate direzionali” [IEEE Std 145-73].

Esempio:

- Rappresentazione in coordinate polari del modulo e della fase (delle componenti) di \underline{E} a distanza costante dall'antenna ($r=\text{costante}$). In genere viene rappresentata per il campo a grande distanza ($r \rightarrow \infty$).
- solido di radiazione *in campo*: rappresentazione di $|\underline{E}(r, \theta, \phi)|$ per $r=\text{costante}$
- solido di radiazione *in potenza*: rappresentazione di $U(\theta, \phi)$ oppure $|\underline{E}(r, \theta, \phi)|^2$ per $r=\text{costante}$

Tipologie: rappresentazione polare (in figura) e rappresentazione assonometrica

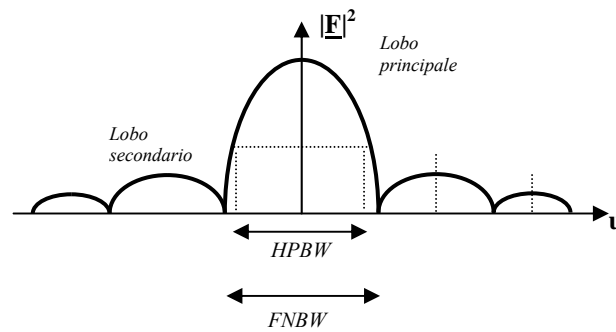


➤ **Diagramma di radiazione** (“*antenna pattern*”)

rappresentazione bi-dimensionale del solido di radiazione mediante sezioni a $\phi=\text{cost.}$ o $\theta=\text{cost.}$

- diagramma di radiazione in campo, ovvero sezione del solido di radiazione in campo
- diagramma di radiazione in potenza, ovvero sezione del solido di radiazione in potenza

Tipologie: rappresentazione polare e cartesiana (in figura)



Piani principali (“principal patterns”):

- piano di elevazione a $\varphi=0^\circ$ per $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
- piano azimutale a $\theta=90^\circ$ per $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$
- piano E (contenente il campo E e la direzione di massima radiazione per antenne in polarizz. lineare)
- piano H (contenente il campo H e la direzione di massima radiazione per antenne in polarizz. lineare)

Lobo di radiazione (“radiation lobe”): porzione del solido di radiazione delimitata da regioni a relativa bassa radiazione.

Lobo principale (“major lobe”): lobo di radiazione contenente la direzione del massimo di radiazione.

Lobo secondario (“minor lobe”): ogni lobo di radiazione eccetto il principale.

Lobo laterale (“side lobe”): ogni lobo in direzione diversa da quella considerata (generalmente, del massimo).

Lobo posteriore (“back lobe”): lobo secondario in direzione opposta al principale.

Larghezza del fascio a metà potenza: ampiezza angolare del lobo principale a metà potenza (a -3 dB) (*Half Power Beam Width, HPBW*).

Larghezza del fascio al primo nullo: ampiezza angolare del lobo principale tra i primi due nulli (*First Null Beam Width, FNBW*).

1.4.b Angolo solido di radiazione ed efficienza di lobo

Il *solido di radiazione in potenza normalizzato* si ottiene normalizzando rispetto alla direzione del massimo di radiazione, generalmente assunta in $\theta=0$ e $\varphi=0$, l'intensità di radiazione. Analogamente il *solido di radiazione in campo normalizzato* si ottiene normalizzando il modulo del campo.

L'intensità di radiazione normalizzata $U_n(\theta, \varphi)$ è pertanto data da:

$$U_n(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{U(0,0)} \quad [\text{adim}]$$

ove $U(0,0)$ rappresenta il solido nella direzione del massimo di radiazione assunta in $\theta=0$ e $\varphi=0$. Per definizione deve essere $0 \leq U_n(\theta, \varphi) \leq 1$.

➤ Angolo solido di radiazione (“radiation solid angle”)

“l'angolo solido attraverso il quale tutta la potenza sarebbe irradiata se l'intensità di radiazione fosse costante e uguale al suo valore massimo”, cioè:

$$\int_{4\pi} U(\theta, \varphi) d\Omega = \int_{\Omega_p} U(0,0) d\Omega = U(0,0) \Omega_p$$

In altri termini:

$$\Omega_p \equiv \int_{4\pi} U_n(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U_n(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad [\text{sr}]$$

➤ **Efficienza del lobo principale**

$$\eta_M \equiv \frac{\int_{\Omega_{ML}} U_n(\theta, \varphi) d\Omega}{\Omega_P} = \frac{\Omega_M}{\Omega_P} \quad [\text{adim}]$$

ove Ω_{ML} rappresenta l'angolo solido relativo al lobo principale (HPBW o FNBW).

➤ **Efficienza dei lobi secondari**

$$\eta_S \equiv \frac{\int_{\Omega_{SL}} U_n(\theta, \varphi) d\Omega}{\Omega_P} = \frac{\Omega_S}{\Omega_P} \quad [\text{adim}]$$

ove Ω_{SL} rappresenta l'angolo solido relativo ai lobi secondari con il vincolo:

$$\Omega_M + \Omega_S = \Omega_P \quad \Rightarrow \quad \eta_M + \eta_S = \frac{\Omega_M}{\Omega_P} + \frac{\Omega_S}{\Omega_P} = 1$$

1.4.c Direttività e guadagno

- Esigenza di descrivere le proprietà radiative dell'antenna in modo indipendente dalle caratteristiche del trasmettitore che l'alimenta.

➤ **Direttività o Guadagno direttivo** ("Directive gain") $D(\theta, \varphi)$.

$$D(\theta, \varphi) \equiv \frac{P_\infty(r, \theta, \varphi)}{P_{\infty iso}} = \frac{U(\theta, \varphi)}{U_{iso}} = \frac{P_\infty(r, \theta, \varphi)}{W_T / 4\pi r^2} = \frac{U(\theta, \varphi)}{W_T / 4\pi} \quad [\text{adim}]$$

Note

- La direttività è una *figura di merito* per le proprietà direttive dell'antenna rispetto al riferimento di un'antenna isotropica che irradia la stessa potenza W_T ; a volte, il riferimento può essere un'antenna nota non-isotropica (es., antenna a tromba).
- La direttività di un'antenna isotropica è unitaria:

$$D_{iso}(\theta, \varphi) = 1$$

- Si usa, in genere, il *valore in dB* della direttività:

$$D_{dB}(\theta, \varphi) = 10 \log_{10} [D(\theta, \varphi)] \quad [\text{dB}]$$

- Utilizzando la definizione di *angolo solido di radiazione* Ω_P , si ha:

$$D(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{U_n(\theta, \varphi)}{\int_{4\pi} U_n(\theta, \varphi) d\Omega} = 4\pi \frac{U_n(\theta, \varphi)}{\Omega_P}$$

➤ **Direttività massima** (“Directivity”) D_M .

$$D_M \equiv \frac{\text{Max}[P_\infty(\theta, \varphi)]}{W_T / 4\pi r^2} = 4\pi \frac{\text{Max}[U(\theta, \varphi)]}{W_T} = 4\pi \frac{\text{Max}[U_n(\theta, \varphi)]}{\Omega_P} = \frac{4\pi}{\Omega_P} \quad [\text{adim}]$$

➤ **Formule approssimate per il calcolo di D_M**

Approssimazione di Kraus (1950).

$$D_M = \frac{4\pi}{\Omega_P} \cong \frac{4\pi}{\Theta_{1\text{rad}} \Theta_{2\text{rad}}} = \frac{41.253}{\Theta_{1\text{deg}} \Theta_{2\text{deg}}}$$

ove $\Theta_{1\text{rad}}$: larghezza angolare a metà potenza (HPBW) in radianti in un piano principale
 $\Theta_{2\text{rad}}$: larghezza angolare a metà potenza (HPBW) in radianti in un piano principale ortogonale al primo
 $\Theta_{1\text{deg}}$: HPBW in gradi in un piano principale
 $\Theta_{2\text{deg}}$: HPBW in gradi in un piano principale ortogonale al primo

Approssimazione di Elliott (1964).

$$D_M = \frac{4\pi}{\Omega_P} \cong \frac{32.400}{\Theta_{1\text{deg}} \Theta_{2\text{deg}}}$$

Approssimazione di Tai-Pereira (1976).

$$D_M = \frac{4\pi}{\Omega_P} \cong \frac{72.815}{\Theta_{1\text{deg}}^2 + \Theta_{2\text{deg}}^2}$$

Note

- La formula di Kraus è adatta per antenne molto direttive con efficienza di lobo principale > 90%;
- La formula di Elliott è adatta per allineamenti planari di antenne;
- La formula di Tai-Pereira si ottiene dalla media aritmetica delle direttività in piani principali ortogonali.
- Dimosteremo che per un'antenna ad apertura di dimensione massima D operante ad una lunghezza d'onda λ , **la larghezza nullo-nullo del lobo principale** (FNBW) e quella **a metà potenza** (HPBW) in un piano azimutale (contenente la dimensione D) è pari a:

$$\Theta_{FN} = c \frac{\lambda}{D} \quad \Theta_{HP} = c \frac{\lambda}{D} \quad [\text{deg}]$$

ove c è costante di proporzionalità ≥ 2 per FNBW (=2 nel caso ideale di distribuzione di campo uniforme sull'apertura) e ≥ 1 per HPBW (=1 nel caso ideale di distribuzione di campo uniforme sull'apertura).

➤ **Guadagno** (“Power gain”)

Il guadagno si definisce come la direttività, ma riferendosi alla potenza alla porta di ingresso dell'antenna W_{IN} (invece che alla potenza irradiata).

IEEE Std: “Rapporto, moltiplicato per 4π , dell'intensità di radiazione rispetto alla potenza netta accettata dall'antenna da un trasmettitore ad essa connesso”.

$$G(\theta, \varphi) \equiv \frac{P_{\infty}(r, \theta, \varphi)}{W_i / 4\pi r^2} = \frac{U(\theta, \varphi)}{W_i / 4\pi} = \eta_r D(\theta, \varphi) \quad [\text{adim}]$$

ove W_{IN} : potenza alla porta di ingresso dell'antenna tale che $W_{IN} - W_T$ è pari alla potenza W_L perduta per dissipazione ("losses").

η_r : efficienza di radiazione dell'antenna, che tiene conto delle perdite dovute alla dissipazione per conduzione e dielettricità, ed è definita da:

$$\eta_r \equiv \frac{W_T}{W_{IN}}$$

Essendo $W_{IN} \geq W_T$, si ha che $0 \leq \eta_r \leq 1$ con:

$$G(\theta, \varphi) \leq D(\theta, \varphi)$$

$\Rightarrow \eta_r = 1$ per antenne senza perdite

$\Rightarrow \eta_r = 0$ per antenne con perdite "infinite"

Note

- Considerando un generatore con potenza disponibile W_g che alimenta l'antenna in trasmissione, a sua volta $W_g \geq W_{IN}$ a causa dei fenomeni di disadattamento, come verrà specificato in seguito.
- Nella definizione di guadagno potremmo riferirci anche alla W_g , ma non è la convenzione generalmente adottata.

➤ **Guadagno massimo ("Gain").**

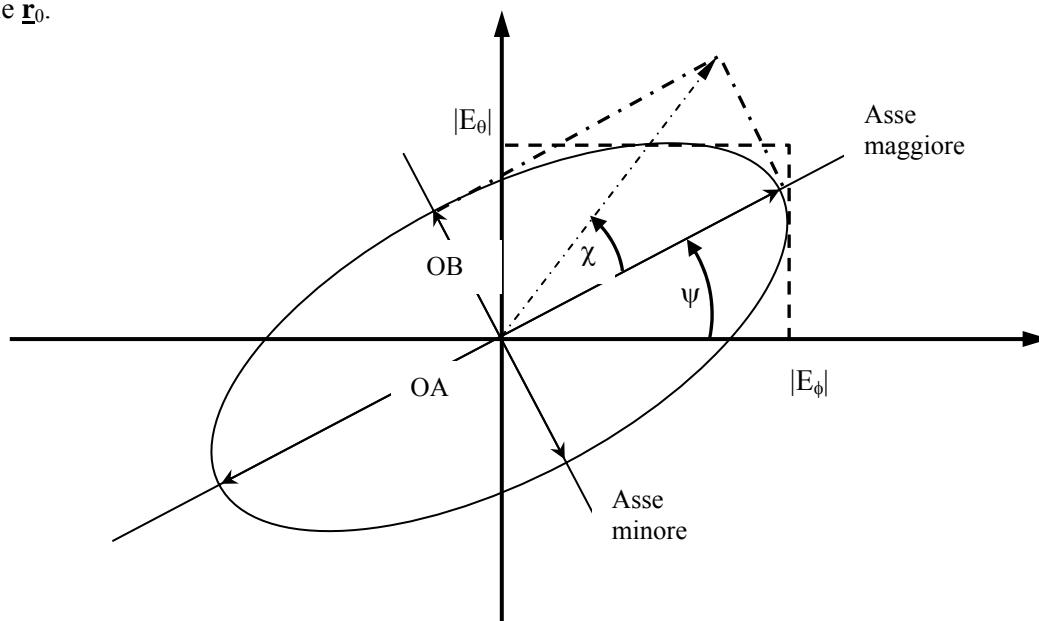
$$G_M \equiv \frac{\text{Max}[P_{\infty}(\theta, \varphi)]}{W_g / 4\pi r^2} = \eta_r D_M \quad [\text{adim}]$$

con $G_M \leq D_M$.

1.4.d Proprietà di polarizzazione dell'antenna

➤ Si identificano con quelle del campo irradiato.

- A grande distanza l'onda TEM localmente piana è polarizzata ellitticamente sul piano ortogonale alla direzione radiale \underline{r}_0 .



- In un riferimento polare il campo elettrico \underline{E}_∞ (vettore in genere complesso) ha le componenti $\underline{E}_\theta = \underline{\theta}_0 E_\theta$ e $\underline{E}_\phi = \underline{\phi}_0 E_\phi$ con $E_\theta = |E_\theta| \exp(j\delta_\theta)$ e $E_\phi = |E_\phi| \exp(j\delta_\phi)$ scalari in genere complessi con modulo $|E_\theta|$ e $|E_\phi|$ (=valori di picco dei campi nel tempo) e differenza di fase $\delta = \delta_\theta - \delta_\phi$.
- Nel tempo l'estremità del vettore percorre una traiettoria ellittica come in figura. Il verso di percorrenza determina una polarizzazione **destra** o polarizzazione **sinistra**.
- La polarizzazione destra si ha quando l'osservatore verso cui si propaga l'onda vede l'estremo del campo ruotare in senso antiorario (ovvero, concorde con un cacciavite destrorso che avanza nel verso di propagazione). La polarizzazione sinistra si ha nel caso opposto.
- Il **rapporto assiale** (*axial ratio*) AR è definito da:

$$AR = \frac{\text{asse maggiore}}{\text{asse minore}} = \frac{OA}{OB} \quad [\text{adim}] \quad 1 \leq AR \leq \infty$$

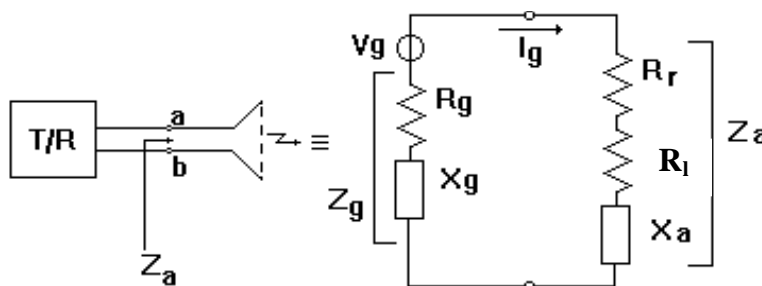
- E' noto che lo stato di polarizzazione è rappresentato dal rapporto dei moduli $|E_\theta|/|E_\phi|$ e dallo sfasamento δ .
- Equivalentemente lo stato di polarizzazione è rappresentato dall'angolo di inclinazione ψ del semiasse maggiore rispetto all'asse di riferimento ($-\pi/2 \leq \psi \leq +\pi/2$) e dall'angolo di ellitticità χ ($-\pi/4 \leq \chi \leq +\pi/4$) legato al rapporto assiale ($\tan \chi = \pm 1/AR$). I due angoli sono rappresentati in figura.
- Le due coppie di grandezze sono tra loro univocamente legate da semplici relazioni trigonometriche.

Casi particolari:

- Campo polarizzato linearmente lungo $\underline{\phi}_0$ (l'ellisse degenera in un segmento orizzontale): $\chi=0$ $\psi=0$
- Campo polarizzato linearmente lungo $\underline{\theta}_0$ (l'ellisse degenera in un segmento verticale): $\chi=0$ $\psi=\pi/2$
- Campo polarizzato circolarmente destro ("Right Circular Polarization": RCP) (l'ellisse degenera in una circonferenza): $\delta=-\pi/2$ $|E_\theta|=|E_\phi|$ ovvero $\chi=-\pi/4$ $\psi=0$
- Campo polarizzato circolarmente sinistro ("Left Circular Polarization": LCP): $\delta=+\pi/2$ $|E_\theta|=|E_\phi|$ ovvero $\chi=+\pi/4$ $\psi=0$

1.4.e Circuito equivalente in trasmissione

- E' possibile schematizzare l'antenna in trasmissione attraverso un **circuito serie equivalente** (di Thevenin) a costanti concentrate che includa il **trasmettitore** con tensione a vuoto V_g e impedenza interna $Z_g = R_g + jX_g$.
- Una volta opportunamente identificata la sua porta di ingresso (morsetti per antenna lineare e sezioni di flangia o piani ideali per antenne ad apertura) è possibile definire l'**impedenza d'ingresso d'antenna** $Z_a = R_a + jX_a$.



dove:

V_g : tensione (valore di picco) a vuoto [V] del generatore

I_g : corrente (valore di picco) [A] erogata dal generatore

R_l : **resistenza di perdita** [Ω] ("loss"), dovuta alla dissipazione di potenza in calore.

R_r : **resistenza di radiazione** [Ω], ovvero resistenza che "dissiperebbe" una potenza erogata dal generatore pari a quella effettivamente trasmessa (o irradiata) nello spazio libero W_T

R_a : **resistenza dell'impedenza d'antenna** [Ω], legata alla energia irradiata e dissipata ($R_a = R_r + R_l$)

X_a : **reattanza dell'impedenza d'antenna** [Ω], legata alla densità di energia del campo e.m. in prossimità dell'antenna.

Note

- In generale, $R_I = R_c + R_d$ con R_c resistenza di perdita per conduzione nel metallo che costituisce l'antenna e R_d resistenza di perdita nel dielettrico dell'antenna.
- La potenza attiva $W_{IN} = W_I + W_T$ in ingresso all'antenna sarà costituita da una parte W_I dissipata ed una parte W_T effettivamente trasmessa (irradiata); quest'ultima definisce la resistenza di radiazione R_r .
- In maniera analoga, si può definire un **circuito equivalente parallelo** (di Norton) per l'antenna in trasmissione specificando la corrente a vuoto del generatore.
- L'impedenza di ingresso Z_a è funzione della frequenza e può dipendere *in condizioni operative* anche dall'adattamento della linea di trasmissione (che connette l'antenna al trasmettitore), dalla sua geometria, dal metodo di alimentazione e dalla prossimità dell'antenna a oggetti circostanti.

➤ **Potenze medie**

Con riferimento al circuito equivalente possiamo identificare le seguenti potenze in gioco:

$$W_g = \frac{V_g^2}{8R_g} \quad \text{potenza disponibile [W] dal generatore.}$$

In condizioni di massimo trasferimento di potenza tra il generatore e l'antenna:

$$Z_a = Z_g^* \Rightarrow R_a = R_l + R_r = R_g; X_a = -X_g$$

si ottengono le seguenti potenze medie [W] (con $W_g = W_I + W_T$):

$$W_T = \frac{1}{2} |I_g|^2 R_r = \frac{V_g^2}{8} \frac{R_r}{(R_r + R_l)^2} \quad \text{potenza dissipata [W] nella resistenza di radiazione, pari a quella irradiata}$$

$$W_I = \frac{1}{2} |I_g|^2 R_l = \frac{V_g^2}{8} \frac{R_l}{(R_r + R_l)^2} \quad \text{potenza dissipata [W] in calore nell'antenna}$$

➤ **Resistenza di radiazione**

La potenza irradiata è data dal flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie che racchiude l'antenna. Scegliendo la superficie di una sfera di raggio molto grande (grande distanza), ove il campo irradiato è un'onda sferica localmente piana, la resistenza di radiazione è data da:

$$R_r = 2 \frac{W_T}{|I_g|^2} = \frac{\iint_{4\pi} P(r, \vartheta, \varphi) r^2 d\Omega}{\frac{1}{2} |I_g|^2} \quad [\Omega]$$

➤ **Reattanza dell'impedenza di ingresso**

- Applicando il vettore di Poynting alla regione chiusa priva di sorgenti compresa tra una superficie che racchiude il generatore e la sfera all'infinito, la potenza reattiva ceduta dal generatore all'antenna è proporzionale alla differenza tra energia magnetica ed elettrica accumulata nella regione considerata.
- A grande distanza dall'antenna, il campo irradiato è un'onda localmente piana per cui si ottiene che le densità di energia elettrica w_E e magnetica w_H sono uguali. Pertanto, X_a viene determinata dalla configurazione del campo nella zona prossima all'antenna (campo vicino).

Note:

- a seconda dei casi, si potrà avere un'antenna con comportamento capacitivo (ovvero $X_a < 0$), induttivo (ovvero $X_a > 0$) oppure risonante (ovvero $X_a = 0$)
- la determinazione analitica del campo vicino e di X_a è un problema complesso che non verrà trattato e che verrà accennato nel seguito per le antenne lineari.

1.4.f Efficienza totale di antenna

L'efficienza totale dell'antenna (in trasmissione) η_T è il rapporto tra la potenza trasmessa (irradiata) W_T e la potenza disponibile W_g fornita dal generatore. Essa è determinata da:

- disadattamento tra generatore ed antenna (efficienza di disadattamento η_m)
- dalle perdite nel conduttore e nel dielettrico dell'antenna (efficienza di radiazione η_r).

$$\eta_T \equiv \frac{W_T}{W_g} = \eta_m \cdot \eta_r \quad (0 \leq \eta_T \leq 1) \quad [\text{adim}]$$

Note:

- L'efficienza dipende anche dalla polarizzazione dell'antenna rispetto a quella desiderata, che in genere è legata a quella del sistema ricevente. Tale fattore di efficienza di polarizzazione verrà introdotto successivamente nell'analisi dell'antenna in ricezione in relazione alla polarizzazione del campo incidente.

➤ Efficienza di adattamento (“mismatching efficiency”)

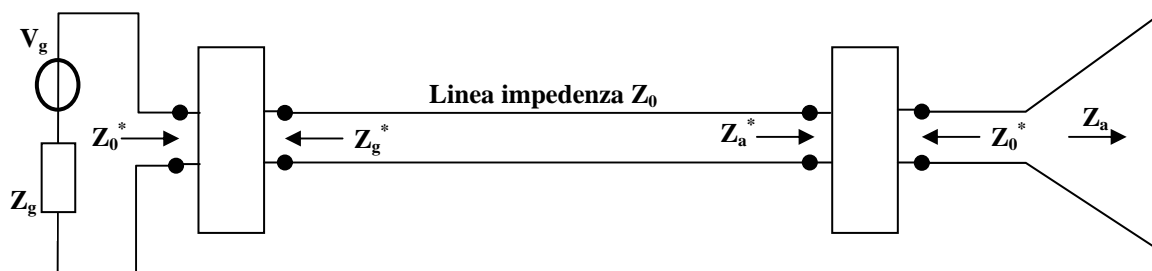
- Il trasmettitore è solitamente collegato all'antenna attraverso una linea di trasmissione (linea bifilare, cavo, guida, etc.) che assumiamo senza perdite con impedenza caratteristica Z_0 reale. Quando necessario, opportuni circuiti di adattamento assicurano la condizione di adattamento per il massimo trasferimento di potenza.
- Assumendo il generatore adattato alla linea, l'antenna vedrà un generatore con impedenza Z_0 reale. Per l'antenna in trasmissione (ed analogamente nel caso di antenna in ricezione), si ottiene l'efficienza di adattamento η_m :

$$\eta_m \equiv \frac{W_T + W_l}{W_g} = 1 - |\Gamma|^2 = 1 - \left| \frac{\text{VSWR} - 1}{\text{VSWR} + 1} \right|^2 \quad [\text{adim}]$$

dove VSWR (Voltage Standing Wave Ratio): rapporto d'onda stazionaria

$\Gamma = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0}$: coefficiente complesso di riflessione in tensione all'ingresso dell'antenna

Z_0 : impedenza caratteristica della linea di trasmissione che connette il generatore all'antenna.



Note

- L'efficienza η_m è adimensionale e compresa tra 0 e 1.
- Si ha $\eta_m = 1$ nel caso di perfetto adattamento di impedenza tra generatore/carico ed antenna.

➤ **Efficienza di radiazione** (“radiation efficiency”)

Con riferimento al circuito in trasmissione (ed analogamente per l'antenna in ricezione), si ottiene l'efficienza di radiazione η_r :

$$\eta_r = \frac{W_T}{W_T + W_l} = \frac{R_r}{R_r + R_l} \quad [\text{adim}]$$

Note

- L'efficienza η_r è compresa tra 0 e 1: vale 1 nel caso di antenne prive di perdite sia ohmiche che dielettriche in quanto $R_l=0$. Le perdite dielettriche vengono in genere trascurate rispetto a quelle ohmiche.
- Per un filo conduttore di lunghezza l e sezione S con conducibilità σ [S/m], la resistenza di perdita per conduzione è data in corrente continua (trascurando le perdite dielettriche):

$$R_{l_dc} = \frac{l}{\sigma S} \quad [\Omega]$$

Ad alta frequenza, se la profondità di penetrazione δ_s (“skin depth”) del metallo è piccola in confronto alla dimensione massima della sezione S e data da (effetto pelle o “skin effect”):

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_o \sigma}} \quad [\text{m}]$$

la corrente si confina in un strato sottile di area $S = p \delta$ (con $p=2\pi r$ perimetro per sezione di raggio r) intorno alla superficie del conduttore per cui la resistenza di perdita è:

$$R_{l_hf} \cong \frac{l}{\sigma p \delta_s} = \frac{l}{p} \sqrt{\frac{\omega \mu_o}{2\sigma}} = \frac{l}{p} R_s \quad [\Omega]$$

ove R_s : resistenza superficiale del conduttore
 μ_o : permeabilità magnetica del vuoto ($\mu_o=4\pi \cdot 10^{-7}$ A/m)