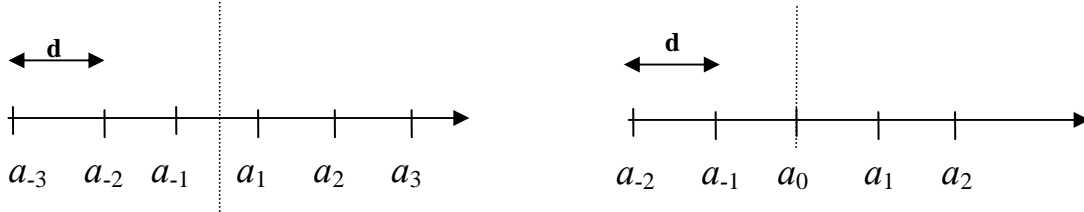


5.6 ALLINEAMENTI SIMMETRICI (NON UNIFORMI)

- Gli allineamenti rettilinei equidistanti simmetrici hanno i coefficienti di eccitazione disposti simmetricamente rispetto al centro dell'allineamento uguali tra loro. Nel caso il numero di elementi n sia dispari è presente un elemento centrale.



- Ricordiamo l'espressione della funzione di radiazione per allineamento rettilineo e la sua specializzazione nel caso equidistante. L'origine dell'asse z rispetto a cui si considerano le distanze z_m è presa nel primo elemento (indicato con $m=0$ oppure $i=1$).

$$F(\theta) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m e^{jk_o z_m \cos \theta} = \sum_{m=0}^{n-1} a_m e^{jk_o m d \cos \theta} = \sum_{m=0}^{n-1} |a_m| e^{jm\delta} e^{jk_o m d \cos \theta} = \sum_{i=1}^n |a_i| e^{j(i-1)(k_o d \cos \theta + \delta)}$$

- Negli allineamenti simmetrici consideriamo l'origine dell'asse z al centro dell'allineamento e numeriamo gli elementi e i coefficienti a_i di eccitazione dal centro dell'allineamento come indicato in figura, indicando con a_0 l'eccitazione dell'elemento centrale (se presente). Nel caso di n pari l'indice i va da $-n/2$ a $n/2$, mentre se n è dispari va da $-(n-1)/2$ a $(n-1)/2$, assumendo anche il valore zero. La proprietà di simmetria si traduce nella condizione:

$$a_{-i} = a_i$$

- Nel **caso n pari** consideriamo separatamente i termini della sommatoria dovuti agli elementi a destra e a sinistra dell'origine dell'asse z . La fase degli esponenziali per il primo elemento a destra dell'origine è proporzionale alla distanza $d/2$ dall'origine, mentre quella del secondo elemento alla distanza $(2-1/2)d$ e così via. Analogamente la fase del primo elemento a sinistra è proporzionale a $-d/2$, quella del secondo a $-(2-1/2)d$ e così via. Gli elementi estremi sono invece a distanza $(n/2-1/2)d$ dall'origine. Si ottiene pertanto:

$$\begin{aligned} \text{per } z > 0 \quad ; \quad F^+(\theta) &= \sum_{i=1}^{n/2} a_i e^{jk_o \left(i - \frac{1}{2}\right) d \cos \theta} = \sum_{i=1}^{n/2} |a_i| e^{j \left(i - \frac{1}{2}\right) (k_o d \cos \theta + \delta)} = \sum_{i=1}^{n/2} |a_i| e^{j \left(i - \frac{1}{2}\right) u} \\ \text{per } z < 0 \quad ; \quad F^-(\theta) &= \sum_{i=1}^{n/2} a_{-i} e^{-jk_o \left(i - \frac{1}{2}\right) d \cos \theta} = \sum_{i=1}^{n/2} |a_i| e^{-j \left(i - \frac{1}{2}\right) (k_o d \cos \theta + \delta)} = \sum_{i=1}^{n/2} |a_i| e^{-j \left(i - \frac{1}{2}\right) u} \end{aligned}$$

Ove si è considerato che $a_{-i} = a_i$ e le fasi crescono con la distanza dall'origine con la legge $a_i = |a_i| e^{j(i-1/2)\delta}$, ove si è introdotto uno sfasamento δ tra le eccitazioni di antenne contigue.

- Sommando i due contributi si ottiene:

$$F(\theta) = F^+(\theta) + F^-(\theta) = 2 \sum_{i=1}^{n/2} |a_i| \cos \left[\left(i - \frac{1}{2}\right) k_o d \cos \theta \right] = 2 \sum_{i=1}^{n/2} |a_i| \cos \left[(2i-1) \frac{u}{2} \right] \quad n \text{ pari}$$

- Analogamente, nel **caso n dispari** gli elementi estremi sono a distanza $(n-1)d/2$ dall'origine e si ottiene per gli elementi a destra ed a sinistra dell'origine:

$$z > 0 \quad ; \quad F^+(\theta) = \sum_{i=1}^{(n-1)/2} a_i e^{jk_o i d \cos \theta} = \sum_{i=1}^{(n-1)/2} |a_i| e^{j u i}$$

$$z < 0 \quad ; \quad F^-(\theta) = \sum_{i=1}^{(n-1)/2} a_i e^{-jk_o i d \cos \theta} = \sum_{i=1}^{(n-1)/2} |a_i| e^{-j u i}$$

- A questi due contributi si aggiunge quello dell'elemento centrale con fase dell'esponenziale nulla e pertanto otteniamo:

$$F(\theta) = F^+(\theta) + F^-(\theta) = a_o + 2 \sum_{i=1}^{(n-1)/2} a_i \cos[i k_o d \cos \theta] = a_o + 2 \sum_{i=1}^{(n-1)/2} |a_i| \cos\left[2i \frac{u}{2}\right] \quad n \text{ dispari}$$

- E' possibile scrivere in una **forma unificata** le espressioni trovate nei due casi. Se n è pari introduciamo un indice k definito come $2i-1$ mentre se n è dispari introduciamo un indice k pari a $2i$. Per un allineamento simmetrico (con numero di elementi n pari o dispari) la funzione di radiazione vale pertanto:

$$F(u) = 2 \sum_{k=0,1}^{n-1} a_k \cos k \frac{u}{2} \quad \begin{cases} n \text{ pari} & \rightarrow k = 1, 3, 5, \dots \\ n \text{ dispari} & \rightarrow k = 0, 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

l'indice della sommatoria k assume solo valori dispari ($k=2i-1$) se n è pari mentre parte da zero ed assume solo valori pari ($k=2i$) se n è dispari. In ogni caso il massimo valore che l'indice k assume è $n-1$.

- Ricordiamo che nei corsi di Analisi Matematica vengono introdotti i polinomi di Chebysheff $T_k(x)$ nella variabile x di grado k con le seguenti relazioni:

$$\cos k \frac{u}{2} = \Re e \left(e^{j k \frac{u}{2}} \right) = \Re e \left(e^{j \frac{u}{2}} \right)^k = \Re e \left(\cos \frac{u}{2} + j \sin \frac{u}{2} \right)^k = T_k \left(\cos \frac{u}{2} \right) = T_k(x)$$

dove si è posto $\cos u/2 = x$ e $u/2 = \cos^{-1} x$ se u è reale. Sussistono poi le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \text{per } |x| < 1 & \rightarrow T_k = \cos k \left(\cos^{-1} x \right) \\ \text{per } x > 1 & \rightarrow T_k = \cosh \left(k \cosh^{-1} x \right) \\ \text{per } x < -1 & \rightarrow T_k = (-1)^k \cosh \left(k \cosh^{-1} x \right) \end{aligned}$$

- Ricordiamo alcune importanti proprietà dei polinomi di Chebysheff $T_k(x)$

- ❖ I polinomi di Chebysheff $T_k(x)$ sono polinomi in x di grado k .
- ❖ Per k dispari ci sono solo potenze di x di grado dispari e viceversa se k è pari ci sono solo potenze di grado pari.
- ❖ I minimi ed i massimi relativi valgono $\min[T_k(x)] = \pm 1$ e $\max[T_k(x)] = \pm 1$. Essi sono presenti solo nell'intervallo di x tra -1 e $+1$ ($x \in [-1, +1]$).
- ❖ Tutti i nulli sono nell'intervallo di x compreso tra -1 e $+1$.
- ❖ Assumono valore $T_k(1) = +1$ per $x = +1$.
- ❖ Assumono il valore $T_k(-1) = +1$ per $x = -1$ se k è pari, e valore $T_k(-1) = -1$ per $x = -1$ se k è dispari.

Gli andamenti qualitativi dei polinomi di grado dallo zero al quarto sono riportati in figura.

- Negli allineamenti simmetrici il fattore di allineamento può essere scritto in termini di polinomi di Chebyshev nella variabile $x = \cos(u/2)$, dove u è la variabile di radiazione prima introdotta, ovvero:

$$F(u) = 2 \sum_{k=0,1}^{n-1} a_k \cos k \frac{u}{2} = 2 \sum_{k=0,1}^{n-1} a_k T_k(x) \quad \begin{cases} n \text{ pari} & \rightarrow k = 1, 3, 5, \dots \\ n \text{ dispari} & \rightarrow k = 0, 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

- Il fattore di allineamento di allineamenti simmetrici, essendo somma di $T_k(x)$ con grado k massimo pari a $n-1$, è a sua volta un polinomio nella variabile x di grado $n-1$ (numero di elementi diminuito di 1) che contiene potenze della variabile x di grado solo dispari (per n pari) o solo pari (per n dispari). Tale proprietà viene utilizzata per progettare allineamenti simmetrici che abbiano caratteristiche ottimali dal punto di vista del diagramma di radiazione (si veda 2° modulo di Antenne).

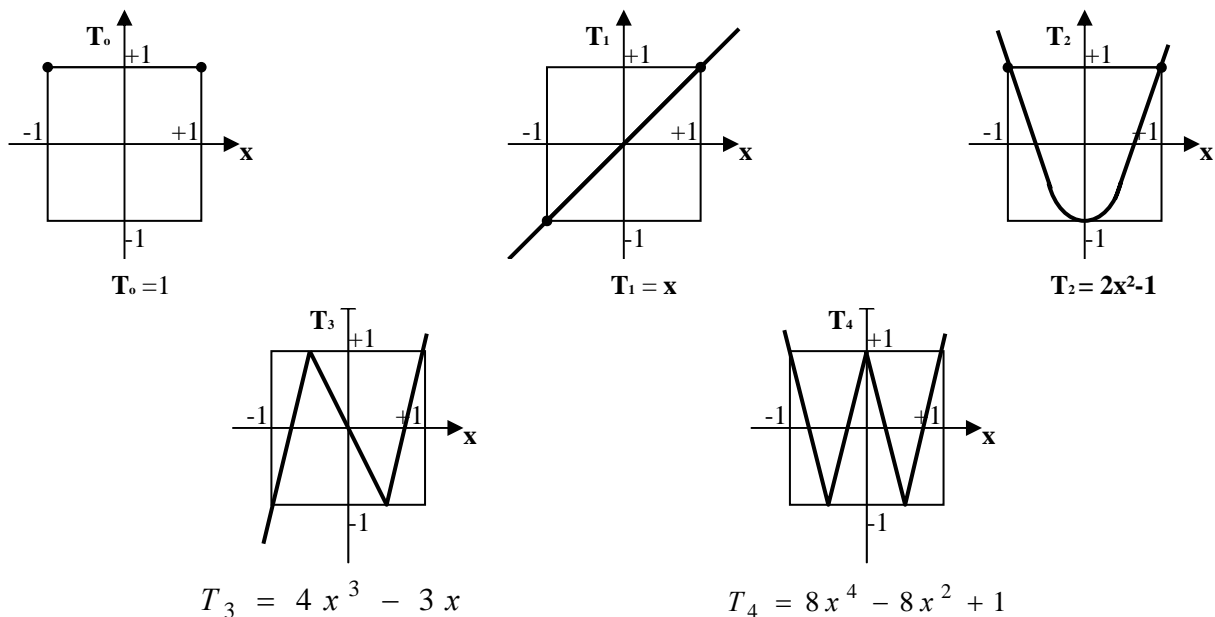
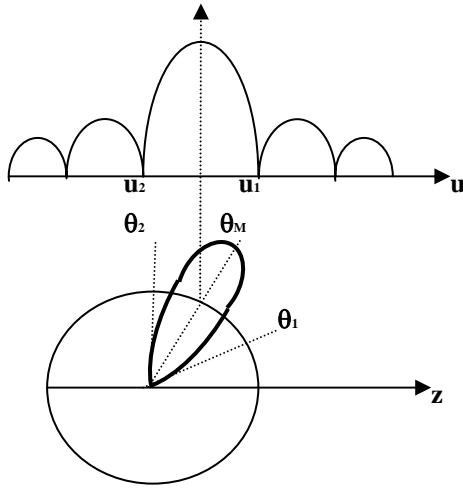


Figura: Polinomi di Chebyshev di grado crescente da zero (in alto a sinistra), fino a 4 (in basso a destra)

5.7 ALLINEAMENTI A SCANSIONE (PHASED ARRAY)

- Sappiamo che uno sfasamento opportuno tra le eccitazioni degli elementi di un allineamento determina massima radiazione nella direzione ortogonale (**Broadside**) o parallela (**End-fire**) all'asse dell'allineamento. E' evidente che una opportuna scelta della fase permette di realizzare il massimo in una direzione predefinita qualunque.
- Variando la fase in maniera continua nel circuito che alimenta l'antenna, varia il puntamento del lobo principale. Viene realizzata una scansione del lobo principale senza movimenti meccanici ed in maniera praticamente istantanea (scansione elettronica). Ciò può essere utile in diverse applicazioni di telecomunicazione e telerilevamento (ad esempio variazione del puntamento di un antenna radar). Il circuito di alimentazione che determina la variazione della fase è di solito basato su traslatori di fase a ferrite.



Principio della scansione elettronica

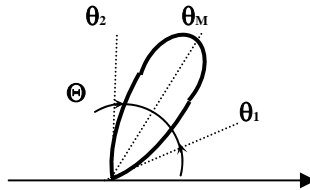
- La condizione sullo sfasamento $\delta = \delta_M$ affinché l'antenna punti in una direzione predeterminata $\theta = \theta_M$ richiede che la variabile di radiazione sia $u=0$ per porci nel massimo della $F(u)$. Imponiamo quindi $u=0$ nella direzione $\theta = \theta_M$, ovvero che i contributi di campo dai diversi elementi siano tutti in fase in tale direzione. Pertanto

$$u|_{\theta=\theta_M} = kd \cos \theta + \delta|_{\theta=\theta_M} = kd \cos \theta_M + \delta_M = 0$$

da cui la condizione è la seguente:

$$\delta_M = -kd \cos \theta_M$$

5.7.a Ampiezza del lobo principale negli allineamenti a scansione



- Ipotizziamo un lobo principale diretto verso θ_M sufficientemente stretto e approssimativamente simmetrico. Consideriamo i primi due zeri del diagramma di radiazione θ_1 e θ_2 e l'ampiezza nullo-nullo del lobo principale pari a $\Theta = \theta_2 - \theta_1$, ove:

$$\theta_1 = \theta_M - \frac{\Theta}{2} ; \quad \theta_2 = \theta_M + \frac{\Theta}{2}$$

- La direzione di puntamento del lobo principale è determinata dalla seguente condizione:

$$u_M = \delta_M + \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta_M = 0$$

mentre i due primi nulli si hanno, come già visto, per $nu_{1,2}/2 = \pm\pi$, ovvero:

$$u_{1,2} = \delta + \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta_{1,2} = \pm \frac{2\pi}{n}$$

- Calcolando la differenza $u_2 - u_M$ si ottiene:

$$u_2 - u_M = \frac{2\pi}{\lambda} d (\cos \theta_2 - \cos \theta_M) = -\frac{2\pi}{n} \Rightarrow \cos \theta_2 - \cos \theta_M = -\frac{\lambda}{nd}$$

- Avendo ipotizzato la larghezza del fascio Θ sufficientemente stretta sviluppiamo in serie di Taylor fino al secondo ordine rispetto a θ con punto iniziale θ_M :

$$\cos \theta_2 = \cos \left(\theta_M + \frac{\Theta}{2} \right) = \cos \theta_M - \left(\frac{\Theta}{2} \right) \sin \theta_M - \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 \cos \theta_M + \dots$$

per cui:

$$\cos \theta_2 - \cos \theta_M = -\left(\frac{\Theta}{2} \right) \sin \theta_M - \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 \cos \theta_M$$

- Confrontando le due relazioni precedenti per $\cos \theta_2 - \cos \theta_M$ si ottiene una equazione algebrica di secondo grado che fornisce la larghezza del lobo nullo-nullo in funzione della direzione di puntamento del lobo principale nell'allineamento a scansione, ovvero l'equazione che lega le variabili θ_M e Θ :

$$\left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 \cos \theta_M + 2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \sin \theta_M = \frac{2\lambda}{nd}$$

- Nei due casi specifici di allineamenti **Broadside** e **End-fire**, essendo $\theta_M = \pi/2$ e $\theta_M = 0$, rispettivamente, si dimostrano le relazioni già introdotte nel paragrafo precedente:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{2\lambda}{nd} & \text{Broadside} \\ \Theta &= 2\sqrt{\frac{2\lambda}{nd}} & \text{End - fire} \end{aligned}$$

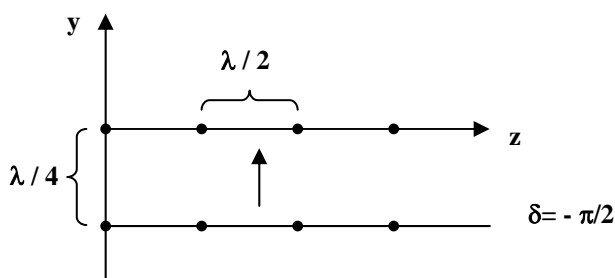
- Questo significa che, per valori di n sufficientemente grandi, il diagramma di radiazione dell'allineamento Broadside presenta un lobo principale più stretto rispetto al caso End-fire.
- Si osserva che la forma del diagramma di radiazione dell'antenna non si conserva durante la scansione angolare, come invece avviene nel caso in cui tutta l'antenna ruota meccanicamente.

5.8 SUPER ALLINEAMENTI

- I superallineamenti sono allineamenti in cui ciascun elemento è costituito, a sua volta, da un allineamento. Di conseguenza se F_1 rappresenta il fattore di allineamento dell'allineamento elementare ed F_2 rappresenta il fattore di cortina del superallineamento, la funzione di radiazione, per il teorema fondamentale di fattorizzazione, vale $F_t = F_o F$ dove a sua volta $F = F_1 F_2$.

5.8.a Doppietto End-Fire di allineamenti Broadside

- ❑ Ricordiamo che l'allineamento Broadside ha, a parità di numero di elementi, il lobo principale più stretto rispetto al caso End-fire. Pertanto un **doppietto End-fire di allineamenti Broadside uguali** ha il lobo principale stretto del Broadside e la cancellazione della parte posteriore dei diagrammi a ciambella grazie alla configurazione End-fire. Si ottiene pertanto un diagramma a pennello ad alta direttività.
- ❑ La figura descrive tale configurazione. Lo sfasamento $\delta = -\pi/2$ è necessario a compensare la differenza di percorso che c'è tra i due allineamenti nella direzione y indicata dalla freccia, ovvero per realizzare la condizione End-fire.



Superallineamento ottenuto come doppietto End-fire (nella direzione y) di allineamenti Broadside (disposti lungo la direzione z).

- ❑ Il diagramma di radiazione si ottiene da quelli precedentemente descritti, relativi agli allineamenti Broadside (per $n = 4$) ed End-fire (per $n = 2$). Applicando il teorema di fattorizzazione si ricava graficamente il diagramma risultante come indicato in figura.

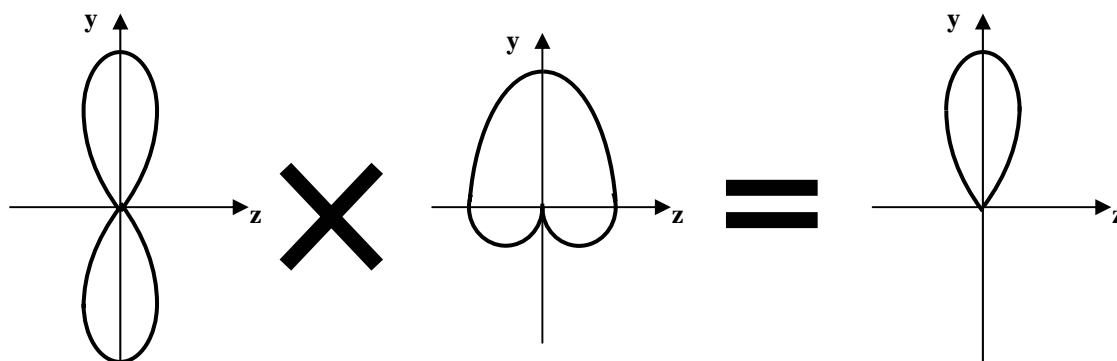
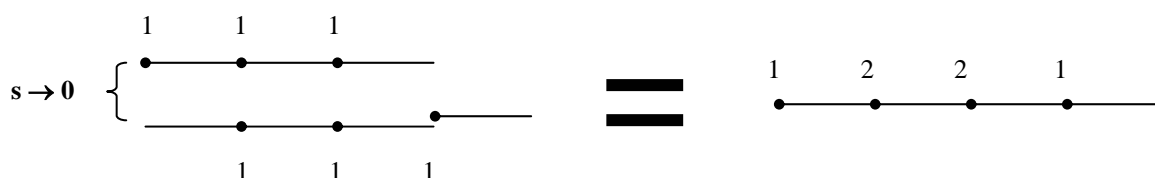


Figura: determinazione grafica del diagramma di radiazione del superallineamento mostrato nella figura precedente

5.8.b Super-allineamenti uniformi

- ❑ Un altro esempio è costituito da un superallineamento allineato nella medesima direzione degli allineamenti uniformi e tutti uguali che lo costituiscono. In figura sono rappresentati due tripletti uniformi traslati nella direzione z e quindi con distanza s nella direzione ortogonale nulla. La struttura risultante è ancora un allineamento rettilineo non uniforme lungo z costituito da $n=4$ elementi.



- Il primo fattore, F_1 , è relativo ai singoli tripletti ($n=3$), invece il secondo fattore, F_2 , è relativo al doppietto con essi costruito ($n=2$). Il fattore di allineamento totale vale dunque:

$$|F| = |F_1 F_2| = \frac{1}{3} \left| \frac{\sin \frac{3u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right| \cdot \left| \cos \frac{u}{2} \right|$$

- In definitiva si può osservare che in questo modo è possibile scomporre un allineamento non uniforme in tanti allineamenti uniformi sovrapposti ed ottenere il fattore di allineamento tramite un opportuno algoritmo di calcolo.

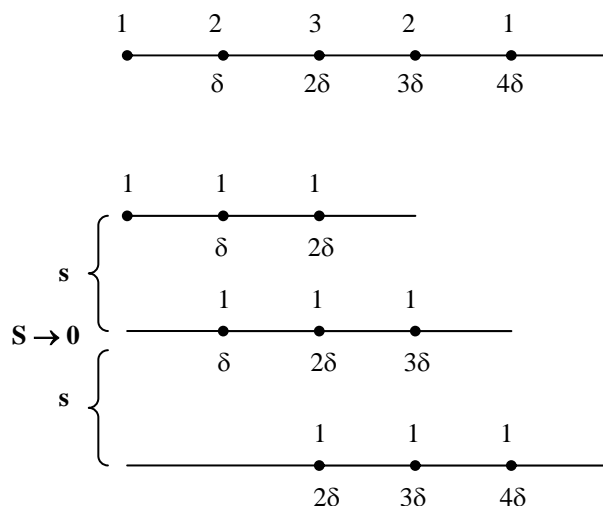
5.8.c Allineamento triangolare

- Un allineamento con $n=5$ ed eccitazioni “triangolari” e fasi lineari è indicato in figura. I coefficienti di eccitazioni si possono ottenere considerando un superallineamento costituito da $n=3$ tripletti uniformi traslati lungo z . Se F_1 è il fattore dei singoli tripletti e F_2 quello del superallineamento (ancora un tripletto) risulta:

$$|F_1| = \frac{1}{3} \left| \frac{\sin 3u/2}{\sin u/2} \right| \quad |F_2| = \frac{1}{3} \left| \frac{\sin 3u/2}{\sin u/2} \right|$$

- Il fattore del superallineamento (ancora un tripletto) risulta per il teorema fondamentale degli allineamenti:

$$|F| = |F_1| \cdot |F_2| = \frac{1}{9} \left| \frac{\sin 3u/2}{\sin u/2} \right|^2$$



Allineamento triangolare a 5 elementi (in alto) e sua realizzazione mediante superallineamento (in basso) costituito da un tripletto di tripletti.

5.8.d Allineamento binomiale

- Ricordiamo che indicando con $p!$ e $q!$ i fattoriali si scrive:

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!}$$

- Un allineamento binomiale ha coefficienti espressi dal seguente coefficiente binomiale:

$$a_m = \binom{p}{m-1}$$

- Tale allineamento si ottiene per moltiplicazione di doppietti. Con p moltiplicazioni si ottiene un allineamento con numero di elementi $n = p+1$.

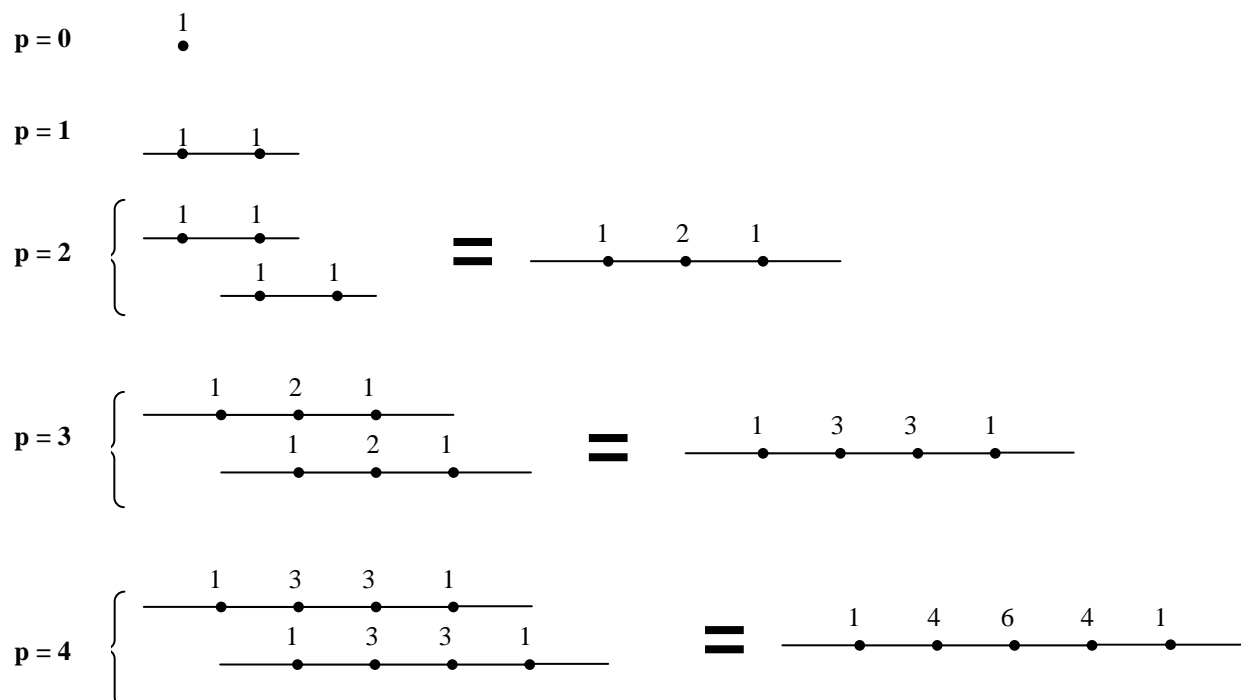
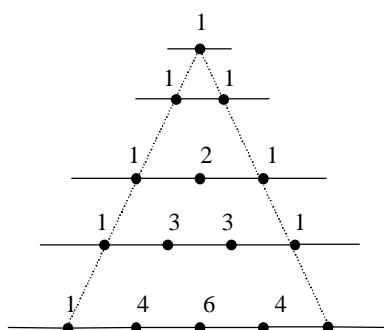


Figura: costruzione dell'allineamento binomiale mediante moltiplicazione di doppietti

- I coefficienti sono anche ottenibili dal noto triangolo di Tartaglia qui rappresentato



- Ricordando il fattore di allineamento di un singolo doppietto $|F(u)| = |\cos(u/2)|$, considerando p moltiplicazioni dovremo moltiplicare p volte tale fattore, ovvero elevarlo alla potenza p . Il modulo del fattore di allineamento di un allineamento binomiale è fornito dalla seguente espressione:

$$|F(u)| = \left| \cos \frac{u}{2} \right|^p$$

- Si osserva che al crescere di p la funzione risulta sempre più rastremata e che se $kd \leq \pi$, ovvero $d \leq \lambda/2$, non appaiono lobi laterali. La larghezza del lobo nullo-nullo è grande e molto maggiore di quella a -3dB , ovvero $\Theta_{NN} \gg \Theta_{3\text{dB}}$. In genere lobi laterali bassi ma lobo principale largo derivano dalla rastremazione delle eccitazioni. Inoltre elevati squilibri tra le eccitazioni rende anche poco pratico l'allineamento binomiale per quanto concerne il circuito di alimentazione.

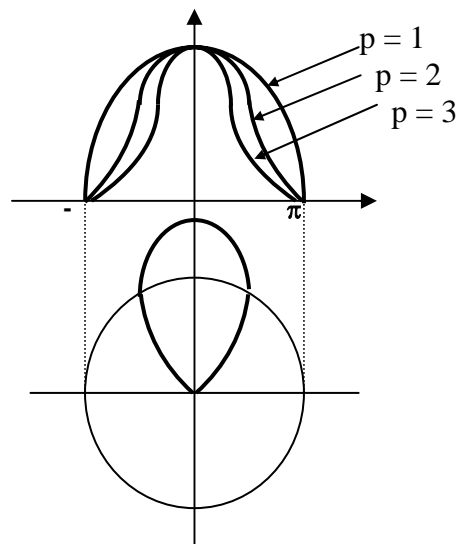


diagramma di radiazione di un allineamento binomiale per diversi valori di p