Formulario di Comunicazioni Elettriche

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Probabilità di A dato B

detta A_i una partizione di S

$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)$ Teorema della probabilità totale

Formula di Bayes per passare dalla priorità a priori a quella a posteriori

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{\sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

Formula di Bernoulli di k successi su n eventi

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Funzione di distribuzione cumulativa o ripartizione di probabilità

$F_x(x) = P\{x \le x\}$ Proprietà 1) $F_x(x)$ è non decrescente 2) è continua a destra

3) $F_x(x) = \lim_{e \to 0^+} \int_{-\infty}^{x+e} f_x(x)dx$ 4) $0 \le F_x(x) \le 1$

5) $F_x(-\infty) = 0$ 6) $F_x(+\infty) = 1$

Probabilità di trovarsi in un intervallo $[a,b]$

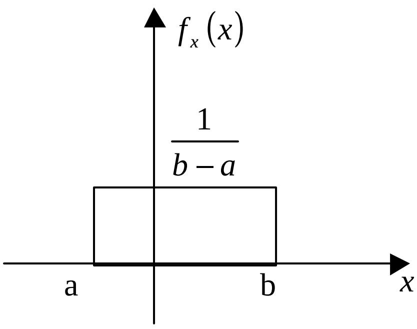
$P\{a \le x \le b\} = F_x(b) - F_x(a)$

Funzione densità di probabilità

$f_x(x) = \dfrac{dF_x(x)}{dx}$ Proprietà 1) $f_x(x) \ge 0$ 2) $\int_a^b f_x(x)dx = F_x(b) - F_x(a)$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = F_x(+\infty) = 1$

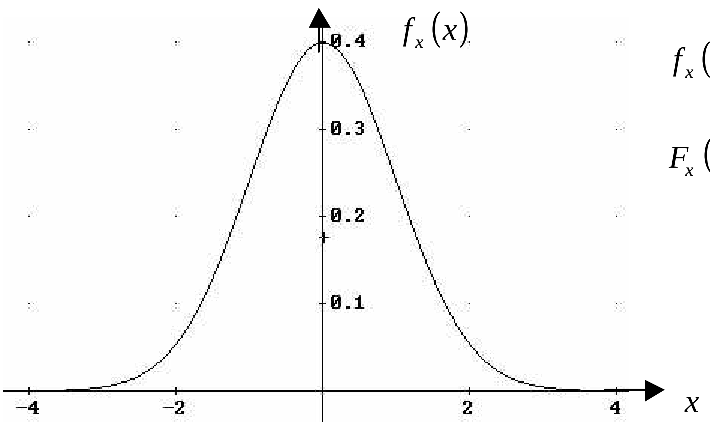
Densità normale



$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

Densità normale o gaussiana (usata per modellare il rumore).



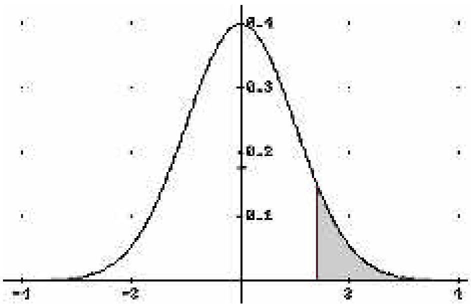
$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}s} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$$

$$F_x(x) = \frac{1}{2}\left[1 - erf\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}s}\right)\right] = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}s}\right) = Q\left(\frac{m-x}{s}\right)$$

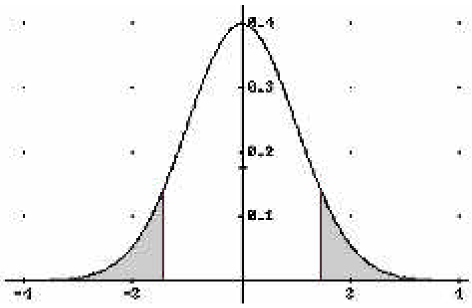
$erfc(x) = \dfrac{2}{\sqrt{p}} \int_x^{+\infty} e^{-l^2} dl$ $erf(x) = \dfrac{2}{\sqrt{p}} \int_0^x e^{-l^2} dl$

$Q(x) = \dfrac{1}{2} erfc\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ $erfc(x) = 1 - erf(x)$

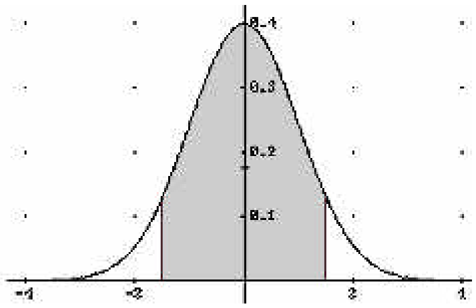
Formulario di Comunicazioni Elettriche



$Q(x)$

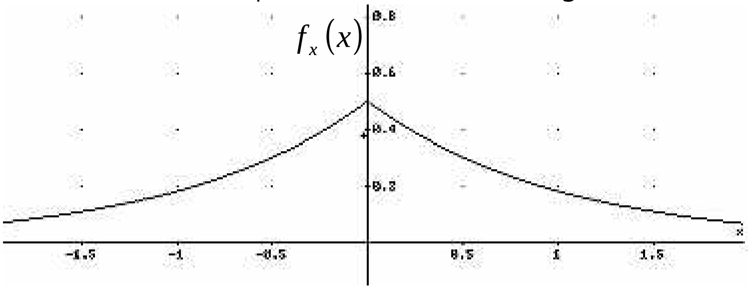


$erfc(x)$



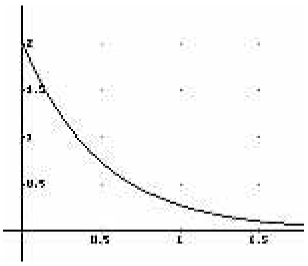
$erf\,(x)$

Distribuzione di Laplace che modella il segnale vocale



$$f_x(x) = \frac{a}{2} e^{-|x|a} \qquad F_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{ax} & x \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-ax} & x \ge 0 \end{cases}$$

Distribuzione esponenziale che modella i guasti



$$f_x(x) = \begin{cases} l e^{-lx} & x > 0 \quad l \;\; positivo \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Distribuzione binomiale
x =# successi in un esperimento bernoulliano di n prove

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$f_x(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k q^{n-k} d(x-k)$$

Distribuzione geometrica
x =# di volte che devo eseguire un esperimento per avere successo

$$P(x = k) = q^{k-1} p$$

$$f_x(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{k-1} p d(x-k)$$

Media o valore atteso o momento del primo ordine

$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx$ se continua $\qquad E(x) = \sum_k x_k p_x(x_k)$ se discreta

in generale $E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x) dx$

Formulario di Comunicazioni Elettriche

Si definisce la varianza come la differenza tra il valore quadratico medio e la media quadratica

$$\mathbf{s}^2 = E\left(x^2\right) - E(x)^2$$

Funzione di distribuzione cumulativa congiunta

$$F_{xh}(x,y) = P\{\mathbf{x} \le x, \mathbf{h} \le y\}$$

Le distribuzioni marginali si ricavano come segue

$$F_x(x) = F_{xh}(x,+\infty) \qquad F_h(y) = F_{xh}(+\infty, y)$$

Densità di probabilità congiunta

$$f_{xh}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{xh}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

se $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{h}$ sono statisticamente indipendenti

$$F_{xh}(x,y) = F_x(x).F_h(y)$$

$$f_{xh}(x,y) = f_x(x) f_h(y)$$

TEORIA DELL'INFORMAZIONE

quantità di informazione associata al simbolo i e si misura in bit

$$I(x_i) = \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Entropia di informazione

$$H(x) = \sum_{i=1}^{M} I(x_i) p_i = \sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i$$

$H(x) \le \log_2 M$ l'uguaglianza vale solo nel caso di equiprobabilità

Un codice è univocamente decodificabile e non viola la regola del prefisso e vale la disuguaglianza di Kraft

$$\sum_{i=1}^{M} 2^{-n_i} \le 1$$

medio di bit

$$\overline{n} = E(n) = \sum_{i=1}^{M} n_i p_i$$

$\overline{n} = H(x)$ se $n_i = \log_2 \frac{1}{p_i}$ ossia se il # di bit del simbolo i_{simo} è proprio $I(x_i)$

TEORIA DEI SEGNALI

$\Phi = \{\varphi_1(t), \mathrm{K}\ , \varphi_n(t)\}$ con supporto $[a,b]$

si dice che $\varphi_i(t)$ è ortogonale a $\varphi_j(t)$ se $\int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt = \begin{Bmatrix} k_i & se\ i = j \\ 0 & se\ i \ne j \end{Bmatrix} = k_i \mathbf{d}_{ij}$

con $\mathbf{d}_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \ne j \end{cases}$ detta simbolo o delta di Kronecker

se $k_i = 1\ \forall i$ allora le $\varphi_i(t)$ si dicono ortronormali

Un segnale $w(t)$ ad energia finita o a potenza media finita definito su $[a,b]$ si può rappresentare su $[a,b]$ come combinazione lineare dei segnali $\varphi_i(t)$ come segue

$$w(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(t) \qquad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{k_j}\int_a^b w(t)\varphi_j^*(t)dt$$

Considerazioni energetiche

$$E_w = \int_a^b |w(t)|^2 dt = \int_a^b \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t)\right|^2 dt = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 k_i \qquad \text{ove } k_i = \int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt$$

Formulario di Comunicazioni Elettriche

Un insieme di segnali è completo se l'errore quadratico medio è nullo, in formule

$$\varepsilon = \int_a^b \left[w(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(t) \right]^2 dt = 0$$

Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Si parte da un insieme generico di segnali $s_1(t), \ldots, s_h(t)$ a supporto su $[0, T]$

Si definiscono i segnali $\psi_i(t)$ e i segnali $\varphi_i(t)$ che sono rispettivamente i segnali ortogonali e ortonormali.

1° segnale) $\psi_1(t) = s_1(t)$ $\quad k_1 = \int_0^T \psi_1(t) \psi_1^*(t) dt$ $\quad \varphi_1(t) = \dfrac{\psi_1(t)}{\sqrt{k_1}}$

2° segnale) $\psi_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t) \varphi_1(t) \rangle \varphi_1(t)$ $\quad k_2 = \int_0^T \psi_2(t) \psi_2^*(t) dt$ $\quad \varphi_2(t) = \dfrac{\psi_2(t)}{\sqrt{k_2}}$

dove $\langle s_2(t) \varphi_2(t) \rangle = \int_0^T s_2(t) \varphi_2^*(t) dt$ è la proiezione di $s_2(t)$ su $\varphi_2(t)$

k ° segnale) $\psi_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle s_k(t) \varphi_i(t) \rangle \varphi_i(t)$ $\quad k_k = \int_0^T \psi_k(t) \psi_k^*(t) dt$ $\quad \varphi_k(t) = \dfrac{\psi_k(t)}{\sqrt{k_k}}$

dove $\langle s_k(t) \varphi_i(t) \rangle = \int_0^T s_k(t) \varphi_i^*(t) dt$ è la proiezione di $s_k(t)$ su $\varphi_i(t)$

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

$w(t)$ segnale ad energia finita o a potenza media finita su $[a, a + T_0]$

sia $f_n(t) = e^{j2\pi n \frac{1}{T_0} t}$ la base di Fourier, allora $w(t)$ si può scrivere come segue

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n \frac{1}{T_0} t} \qquad \text{con} \qquad c_n = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) e^{-j2\pi n \frac{1}{T_0} t} dt$$

si ricorda che $\omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

se $w(t)$ è reale il suo sviluppo in serie è reale e i coefficienti sono generici con $c_n = c_{-n}^*$

se $w(t)$ è reale e pari il suo sviluppo in serie è reale e anche i coefficienti, dove $c_n = c_{-n}$

se $w(t)$ è reale e dispari il suo sviluppo in serie è reale e i coefficienti immaginari puri, dove $c_n = -c_{-n}$

per l'energia del segnale si ha $\quad E_w = \int_a^{a+T_0} |w(t)|^2 dt = \int_a^{a+T_0} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \right|^2 dt = T_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$

TRASFORMATA DI FOURIER

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df$$

Proprietà della Trasformata di Fourier $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}\{a x(t) + b y(t)\} = a X(f) + b Y(f)$

$\mathcal{F}\{x(t - T_d)\} = X(f) e^{-j\omega T_d}$

$\mathcal{F}\{x(at)\} = \dfrac{1}{|a|} X\left(\dfrac{f}{a}\right)$

$\mathcal{F}\{x(t) e^{-j2\pi f_c t}\} = X(f - f_c)$

$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f) Y(f)$

$\mathcal{F}\{x(t) y(t)\} = X(f) * Y(f)$

$\mathcal{F}\left\{\dfrac{d}{dt^n} x(t)\right\} = (+j2\pi f)^n X(f)$

Formulario di Comunicazioni Elettriche

$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\theta)d\theta\right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + X(0)\frac{\delta(f)}{2}$

Se $x(t)$ è reale pari $X(f)$ è reale

Se $x(t)$ è reale dispari $X(f)$ è immaginaria pura

ALCUNE IMPORTANTI RELAZIONI

Definizioni della δ di Dirac: $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\delta(x)dx = w(0)$ $\qquad$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$

$\delta(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau = w(t)$ $\qquad$ $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\delta(x - x_0)dx = w(x_0)$

$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j2\pi xy}dy$ $\qquad$ $\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0)$

Prodotto di convoluzione

$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

Energia di un segnale $w(t)$ definito su $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ $E_w = \lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w(t)w^*(t)dt$

Densità spettrale di energia : $\mathcal{E}(f) = \left|W^2(f)\right|$

Teorema di Parseval (per i segnali ad energia finita e a potenza media finita) che mi dice che trasformando o sviluppando in serie di Fourier io non perdo alcuna informazione sul segnale

$E_w = \lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w(t)w^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|W^2(f)\right|df$ oppure $\frac{E_w}{T_0} = \frac{1}{T_0}\int_{a}^{a+T_0} |w(t)|^2 dt = \sum_{i=1}^{n} |c_n|^2$

Formulazione generale del Teorema di Parseval per segnali ad energia finita (o periodici a potenza media finita)

$\int_{-\infty}^{+\infty} w_1(t)w_2^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(f)W_2^*(f)df$ se $w_1(t) = w_2(t) = w(t)$ allora $E_w = \int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |W(f)|^2 df$

Potenza media (normalizzata) di un segnale $w(t)$

$P_w = \left\langle w^2(t) \right\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w^2(t)dt$

Spettro di potenza o densità spettrale di potenza

$\mathcal{P}_w(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|W_T^2(f)\right|}{T}$ è reale, non negativo e pari

$P_w = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_w(f)df$ potenza normalizzata

Se $w(t)$ è periodico si può scrivere come

$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$ e $W(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - nf_0)$

posto $w_{T_0}(t) = \begin{cases} w(t) & \forall t \in [0, T_0] \\ 0 & altrove \end{cases}$ allora $w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_{T_0}(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_{T_0}(t) * \delta(t - nT_0)$

quindi $W(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0 W_{T_0}(nf_0)\delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - nf_0)$ da cui $c_n = f_0 W_{T_0}(nf_0)$

allora la potenza di $w(t)$ si esprime come $P_w = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$

ed il suo spettro di potenza come $P_w(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 d(f - nf_0)$

Definizioni di decibel

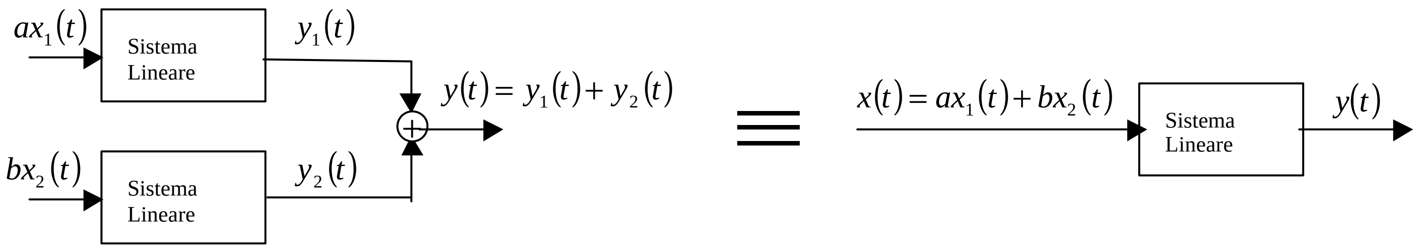
Se la grandezza in esame è una potenza allora il decibel è $g \;\; in \;\; [dB] = 10\log_{10} g$
Se la grandezza in esame è una tensione o una corrente allora il decibel è $g \;\; in \;\; [dB] = 20\log_{10} g$

Si definisce decibel al milliwatt $[dBm] = 10\log_{10} \frac{g}{10^{-3}}$

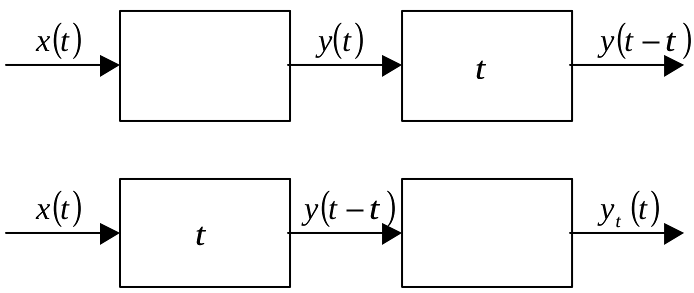
Formula trigonometrica di Eulero $e^{\pm ja} = \cos(a) \pm j\,\mathrm{sen}(a)$

TEORIA DEI SISTEMI

Un sistema è lineare se ad una combinazione lineare degli ingressi corrisponde una combinazione lineare delle uscite.



Un sistema si dice tempo invariante o invariante per traslazioni temporali se l'uscita $y(t - t)$ ritardata di una quantità t coincide con l'uscita $y_t(t)$ ottenuta inviando in ingresso il segnale $x(t - t)$ ritardato della stessa quantità.



La risposta all'impulso caratterizza un sistema LTI (Linear Time Invariant)

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t - t)dt = x(t) * h(t)$ dove $h(t)$ è la risposta del sistema LTI quando all'ingresso c'è $d(t)$

facendo la trasformata di Fourier

$Y(f) = X(f)H(f)$ dove $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$ è detta funzione di trasferimento

Densità Spettrale di Energia dell'ingresso

$E_x(f) = |X^2(f)|$

Densità Spettrale di Energia dell'uscita

$E_y(f) = |H^2(f)| E_x(f)$

Un sistema LTI è non distorcente se il modulo dell'uscita è costante e la fase varia in maniera lineare con f

Scritto $Y(f) = |X(f)| e^{j\angle X(f)}$ $|X(f)|$ lineare con f $\angle X(f)$ lineare con f

Formulario di Comunicazioni Elettriche

PROCESSI CASUALI

Stazionario dell'N_{simo} ordine

$$f_x\left(x(t_1),\ldots,x(t_N)\right)=f_x\left(x(t_1+t_0),\ldots,x(t_N+t_0)\right)$$

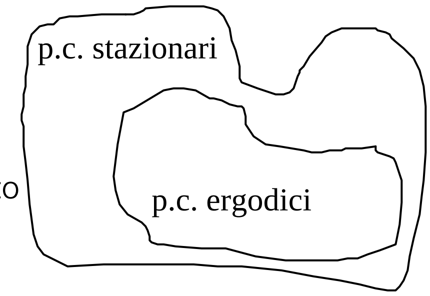
Stazionario del primo ordine

$$f_x\left(x(t_1)\right)=f_x\left(x(t_1+t_0)\right)$$

Un processo casuale (p.c.) che dipende dal tempo in maniera periodica è detto ciclostazionario

Media temporale di un p.c. $x(t)$

$$\langle x(t)\rangle=\lim_{T_0\to+\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)dt$$



Media statistica o media di insieme di un p.c. $x(t)$

$$\overline{x(t)}=E\left(x(t)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)f_x(t)dt$$

Se un p.c. stazionario è tale che $\overline{x(t)}=\langle x(t)\rangle$ il processo si dice ergodico

Funzione di autocorrelazione

$$R_x(t_1,t_2)=\overline{x(t_1)x(t_2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t_1)x(t_2)f_{x_1x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

se il p.c. è stazionario del secondo ordine la media congiunta non dipende dal tempo, posto $\tau=t_1-t_2$

$$\overline{x(t)}^2=R_x(0)$$

$$R_x(\tau)=\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_x(\tau)=\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_x(f)\}$$

$$R_x(\tau)=R_x(-\tau)$$

$$R_x(0)\geq|R_x(\tau)|$$

$$R_x(0)=P_x$$

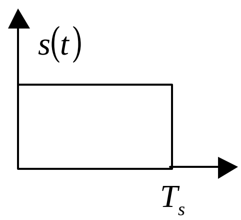
Spettro di potenza di un segnale numerico sotto l'ipotesi di stazionarietà

$$\mathcal{P}_x(f)=\frac{|S^2(f)|}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}R(k)e^{jk\omega T_s}$$ con $R(k)=\overline{a_na_{n+k}}=R(-k)$ e a_n simbolo n_{esimo}

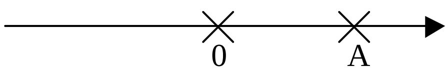
$$\mathcal{P}_x(f)=\frac{|S^2(f)|}{T_s}\left[R(0)+\sum_{k=1}^{\infty}R(k)\cos(\omega kT_s)\right]$$

POSSIBILI FORME D'ONDA ELEMENTARI

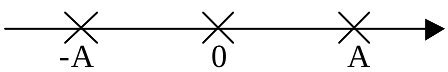
NRZ (non return to zero)



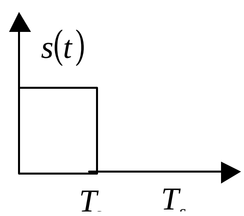
NRZ unipolare



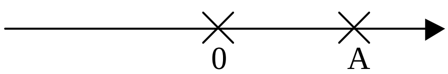
NRZ antipodale

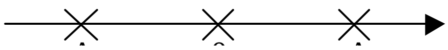


RZ (return to zero) β è detto duty cycle



RZ unipolare





Formulario di Comunicazioni Elettriche

RZ antipodale

PARAMETRI CHE CARATTERIZZANO UN SISTEMA DI TRASMISSIONE

R è la velocità di trasmissione espressa in bit/s

D è la velocità di segnalazione espressa in $simboli/s$

B è la banda (unilatera) occupata dal segnale espressa in Hz

$h = \frac{R}{B}$ è l'efficienza espressa in bit/Hz

SEGNALE	R	D	B	h
NRZ binario	R	R	$1/T_s = D = R$	1
RZ (50%) binario	R	R	$2/T_s = 2D = 2R$	0,5
NRZ quaternario	R	$R/2$	$1/T_s = D = R/2$	2

R bit → Memoria profonda l → $/\, l$ → Mappatore M → D simboli a_n

$$B = \frac{1}{T_s} = D = \frac{R}{l}; h = \frac{R}{B} = \frac{R}{R/l} = l$$

INTERFERENZA INTERSIMBOLICA (ISI)

$x(t)$ → $h(t)$ → $y(t)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n s(t - nT_s) \qquad y(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n s(t - nT_s)\right] * h(t)$$

posto $r(t - nT_s) = s(t - nT_s) * h(t)$ segue $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r(t - nT_s)$

detto t_0 l'istante di campionamento $y(t_0) = \underbrace{a_0 r(t_0)}_{\text{segnale utile}} + \underbrace{\sum_{n \neq 0} a_n r(t - nT_s)}_{ISI}$

Distorsione di picco

$$D_p = \frac{\sum_{n \neq 0} |a_n r(t - nT_s)|}{|a_0 r(t_0)|}$$

con $t_0 : D_p$ è minima. Bisogna che $D_p \in [0,1]$ altrimenti si hanno errori sistematici

Primo teorema di Nyquist che ci dice come deve comportarsi la trasformata di Fourier di un segnale elementare affinché questo segnale elementare ci assicuri ISI nulla.

$$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R(f - nf_s) = cost. \qquad \text{dove } r(t) \text{ è il segnale elementare}$$

SEGNALE A COSENO RIALZATO

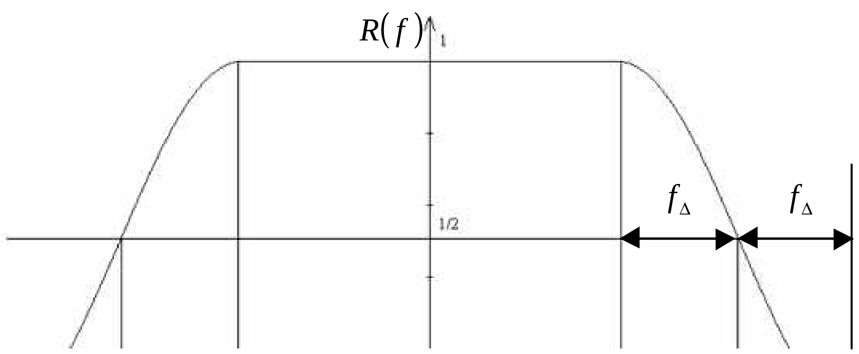
$$R(f) = \begin{cases} 1 \ se \ |f| < f_1 \\ \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{p|f| - f_1}{2 f_\Delta}\right)\right] \ se \ f_1 < |f| < B \\ 0 \ se \ |f| > B \end{cases}$$

con $f_\Delta = B - \frac{f_s}{2}$ e $f_1 = \frac{f_s}{2} - f_\Delta$

graficamente:

$\frac{f_s}{2}$ è la banda minima

f_Δ inizio e fine raccordo



Formulario di Comunicazioni Elettriche

B banda totale (unilatera)

Coefficiente di ROLL-OFF

$r = \dfrac{f_\Delta}{f_s/2}$ rapporto tra la banda aggiuntiva f_Δ e la banda minima richiesta $\dfrac{f_s}{2}$

se r è zero mi trovo nel caso di una porta e non ho banda aggiuntiva, se r è uno vuol dire che ho $f_\Delta = f_s/2$

quindi $r \in [0,1]$. Conoscendo r si calcola B come

$B = \dfrac{f_s}{2}(1+r)$ detta D la velocità do segnalazione in $simboli/\sec$ e $f_s = \dfrac{1}{T_s} = D$ segue

$B = \dfrac{D}{2}(1+r)$ ossia $D = \dfrac{2B}{(1+r)}$ e se ho una banda B, siccome $r \in [0,1]$ segue che $B \le D \le 2B$ $simboli/\sec$

IL RUMORE

Sia $v(t)$ un p.c. stazionario, ergodico, gaussiano, la densità spettrale del suo valore quadratico medio vale

$$\text{P}_v(f) = 2R\left[\frac{h|f|}{2} + \frac{h|f|}{e^{h|f|/kT}-1}\right]$$

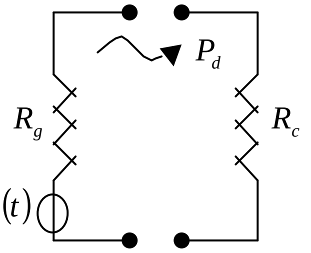
con R in $[\Omega]$, $h = 6.2 \cdot 10^{-34}[J \cdot s]$ è la costante di Plank

$k = 1.38 \cdot 10^{-23}[J/K]$ è la costante di Boltzman

Se ci si trova ad operare con $|f| < 1THz$ e $T < 373{,}13K$ allora l'espressione del valore quadratico medio di $v(t)$ si approssima come $\text{P}_v(f) \cong 2kTR$

P_d è la potenza disponibile (siamo in situazione di adattamento) che si distribuisce a valle e vale

$P_d = \dfrac{\overline{v^2(t)}}{4R}$ (N.B. la resistenza non ha pedice perchè siamo in adattamento)



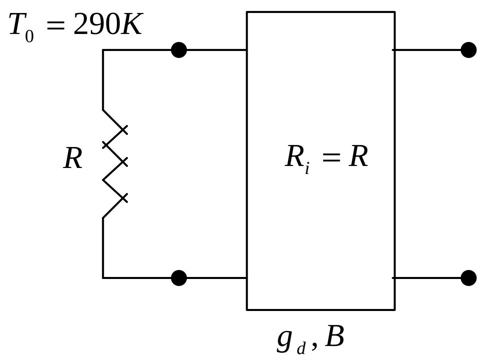
La densità spettrale della potenza di rumore termico disponibile di una resistenza a vuoto sarà

$\text{P}_d(f) = \dfrac{\text{P}_v(f)}{4R} \cong \dfrac{kT}{2}$ con $P_d = \int_{-B}^{B} \text{P}_d(f)\,df = kTB$ che è la potenza di rumore

CIFRA DI RUMORE

$$F(f) = \frac{\text{P}_{n_u}(f)}{\text{P}^*_{n_u}(f)} = \frac{\text{densità spettrale della potenza di rumore all'uscita del bipolo}}{\text{densità spettrale della potenza di rumore all'uscita del bipolo in assenza di rumore generato dal bipolo}}$$

Il sistema è lineare e supponiamo il guadagno g_d costante



$$F(f) = \frac{\frac{kT_0}{2} g_d + \text{P}_n(f)}{\frac{kT_0}{2} g_d} = 1 + \frac{\text{P}_n(f)}{\frac{kT_0}{2} g_d} > 1$$

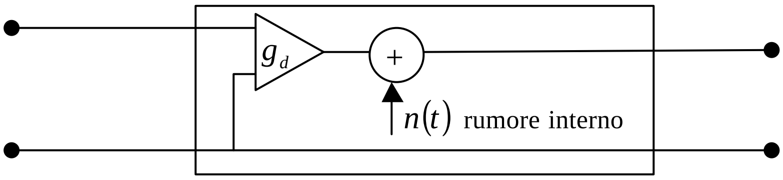
Notare che $\text{P}_n(f)$ è costante perchè generato internamente al bipolo.

Integrando sulla banda si ha per F la seguente espressione

Formulario di Comunicazioni Elettriche

$$F = \frac{\int_{-B}^{B}\left[\frac{kT_0}{2}g_d + P_n(f)\right]df}{\int_{-B}^{B}\frac{kT_0}{2}g_d\,df} = \frac{N_{du}}{kT_0 B g_d}$$ dove N_{du} è la potenza di rumore disponibile all'uscita.

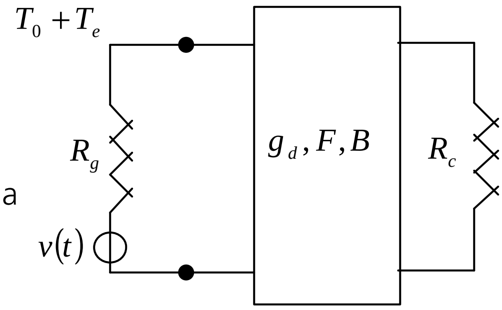
Nel caso in cui il doppio bipolo fosse una linea si ha che $F = 1/g_d = L$,ossia la cifra di rumore coincide con l'attenuazione della linea.



Riepilogando:la cifra di rumore è il rapporto tra la densità spettrale della potenza di rumore all'uscita del doppio bipolo e la densità spettrale della potenza di rumore alluscita del doppio bipolo ne caso che il doppio bipolo non introduca rumore.

$F = \frac{N_{du}}{N_{du}^{*}}$ questa è la definizione operativa di cifra di runore.

TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE



$T_0 = 290K$ per convenzione.

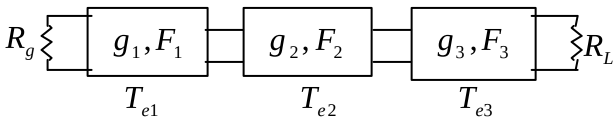
Si ha $F = \frac{kT_0 B g_d + kT_e B g_d}{kT_0 B g_d} = \frac{T_0 + T_e}{T_0}$

Essendo $kT_e B g_d$ il termine che tiene conto della generazione interna di rumore del doppio bipolo. Si vede facilmente che

$T_e = T_0(F-1)$ e che $F = 1 + \frac{T_e}{T_0}$

Cifra di rumore equivalente e temperatura equivalente di una cascata di n doppi bipoli

$$F_{eq} = F_1 + \frac{(F_2 - 1)}{g_1} + \frac{(F_3 - 1)}{g_1 g_2} + \Lambda + \frac{(F_n - 1)}{g_1 g_2 \Lambda\ g_n}$$



$$T_{eq} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} + \frac{T_{e3}}{g_1 g_2} + \Lambda + \frac{T_{en}}{g_1 g_2 \Lambda\ g_n}$$

$$T_{eq} = T_0(F_{eq} - 1)$$

CANALE HERTZIANO

La potenza ricevuta è $P_{RX} = g_{AR} g_{AT} g_{SL} P_{TX} = g_{AR} g_{AT} \frac{l^2}{(4pd)^2} P_{TX}$

Con g_{AR} guadagno dell'antenna ricevente e g_{AT} guadagno dell'antenna trasmittente

$g_{SL} = \frac{l^2}{(4pd)^2}$ guadagno di propagazione nello spazio libero

P_{TX} potenza trasmessa

$l = c/f$ è la lunghezza d'onda ed f è la frequenza a cui stiamo operando

d è la distanza tra le due antenne

Detta $\mathsf{P}_{n_i}(f) = kT_0/2$ la densità spettrale della potenza di rumore disponibile all'ingresso di un canale, la densità spettrale della potenza di rumore disponibile all'uscita dello stesso canale sarà $\mathsf{P}_n(f) = F_{eq}\mathsf{P}_{n_i}(f)$

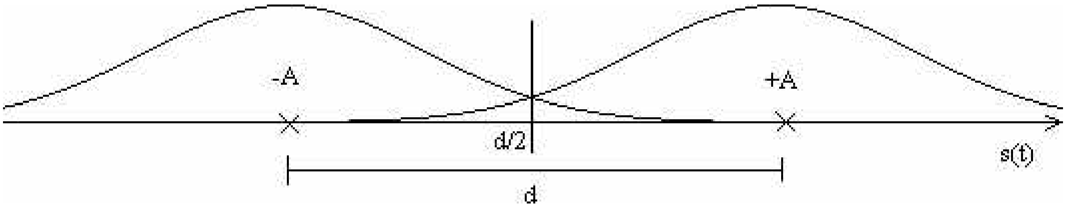
Ossia $\mathsf{P}_n(f) = \frac{kT_0}{2} g_d F_{eq} = k\frac{(T_0 + T_e)}{2} g_d$

Formulario di Comunicazioni Elettriche

Un processo casuale gaussiano è detto bianco o non colorato, quando non dipende dalla frequenza, ossia quando la sua densità spettrla edi potenza è costante e vale per convenzione $P_n(f) = const = \frac{N_0}{2}$, il fattore ½ tiene conto del fatto che le bande in genere sono unilatere.Con $N_0 = k(T_0 + T_e)g_d = kF_{eq}g_d$

PROBABILITA' DI ERRORE SUL SIMBOLO E SUL BIT (2-ASK, BPSK, 2-PSK)

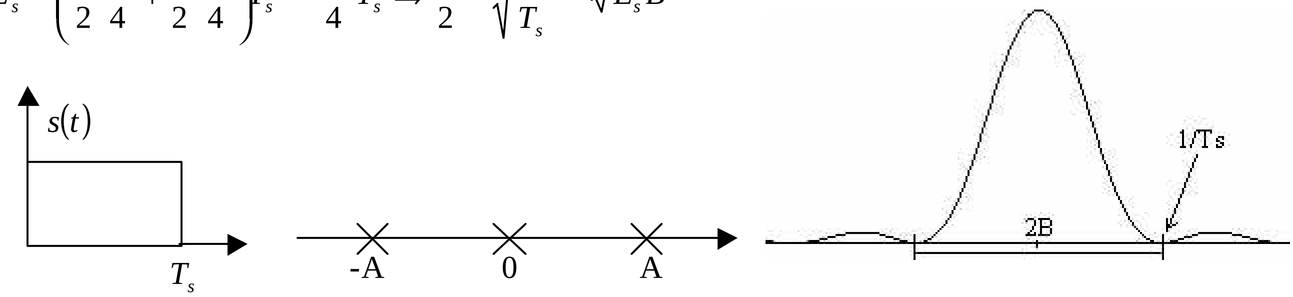
Detta $d/2$ la quantità in figura, la probabilità di errore di un simbolo vale $P_s(e) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d/2}{\sqrt{2}\sigma_m}\right)$



CASO NRZ ANTIPODALE BINARIO

$\sigma_m^2 = N_0 B$ con $B = 1/T_s$ banda del segnale (unilatera) ed N_0 come già definito

$$E_s = \left(\frac{1}{2}\frac{d^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{4}\right)T_s = \frac{d^2}{4}T_s \Rightarrow \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{E_s}{T_s}} = \sqrt{E_s B}$$

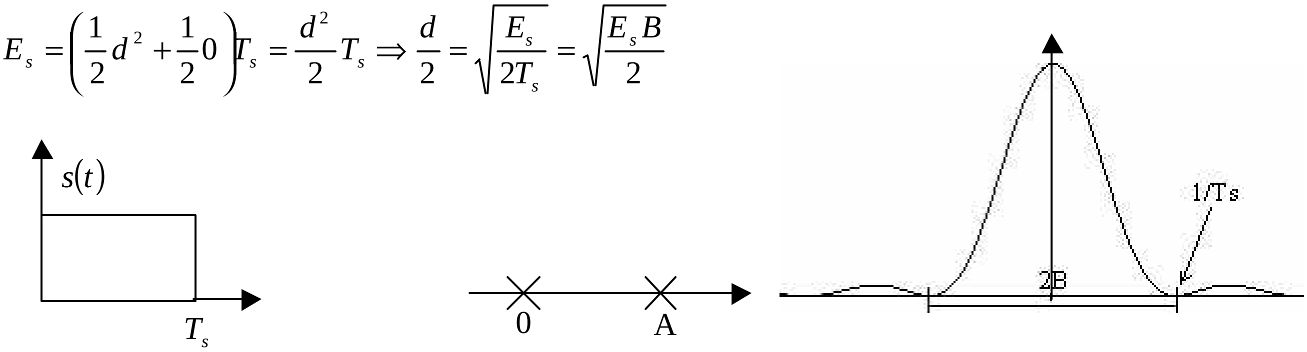


Si ha $P_s(e) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{h}{2}}\right)$ dove $h = \frac{E_s}{N_0}$ è il rapporto segnale rumore S/N (all'uscita). Se il segnale è binario si ha $P_s(e) = P_b(e)$, ossia la probabilità di errore sul simbolo coincide con quella sul bit, quindi $E_s = E_b$ e $P_b(e) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{h}{2}}\right)$ con $h = \frac{E_b}{N_0}$. Si userà l'espressione più adatta in base al contesto.

CASO NRZ UNIPODALE BINARIO

$\sigma_m^2 = N_0 B$ con $B = 1/T_s$ banda del segnale (unilatera) ed N_0 come già definito

$$E_s = \left(\frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}0\right)T_s = \frac{d^2}{2}T_s \Rightarrow \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{E_s}{2T_s}} = \sqrt{\frac{E_s B}{2}}$$



Si ha $P_b(e) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2 \cdot 2N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\sqrt{h}}{2}\right)$ dove $h = \frac{E_b}{N_0}$ è il rapporto segnale rumore S/N (all'uscita).

Siamo nel caso di segnale è binario.

Notare che a causa della presenza della d nel mezzo della banda l'energia del segnale è dimezzata.

FILTRO ADATTATO (esalta il segnale ma non il rumore)

Sia $s(t)$ un segnale ed $n(t)$ un p.c. (rumore)

Formulario di Comunicazioni Elettriche

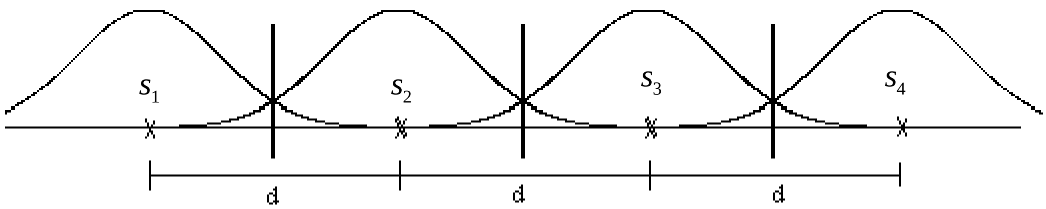
Le ipotesi sono:
1) $s(t)$ è limitato nel tempo, es. $[0, T_s]$
2) $N(f)$ è nota

Segue che il filtro adattato ha la seguente Funzione di Trasferimento (FdT)

$H(f) = \dfrac{S^*(f)}{N(f)} e^{-jwt_0}$ Si ha $P_s(e) = \dfrac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\dfrac{E_s}{N_0}}\right) = \dfrac{1}{2} erfc\left(\sqrt{h}\right)$ dove $h = \dfrac{E_s}{N_0}$

Quindi utilizzando un filtro adattato ho un guadagno di $3dB$, perché a parità di probabilità uso metà energia ovvero a parità di energia dimezzo la probabilità di errore.

4-ASK



Probabilità di errore sul simbolo in una costellazione equispaziata (indipendente dal segnale elementare).

Per i segnali alle estremità vale $P_{s_2}(e) = P_{s_1}(e) = \dfrac{1}{2} erfc\left(\dfrac{d/2}{\sqrt{2}\sigma_m}\right)$ (una sola coda accavallata)

Per i segnali centrali invece vale $P_{s_3}(e) = P_{s_4}(e) = erfc\left(\dfrac{d/2}{\sqrt{2}\sigma_m}\right)$ (entrambe le code accavallate)

La probabilità media vale invece $P_s(e) = \dfrac{3}{4} erfc\left(\dfrac{d/2}{\sqrt{2}\sigma_m}\right)$, in generale, con costellazioni equispaziate di m simboli si ha $P_s(e) = \dfrac{m-1}{m} erfc\left(\dfrac{d/2}{\sqrt{2}\sigma_m}\right)$. La probabilità di errore sul bit si ricava, nota $P_s(e)$, come $P_b(e) = \dfrac{1}{\log_2 m} P_s(e)$, con m numero dei simboli.

Probabilità di errore sul simbolo in una costellazione equispaziata (segnale NRZ antipodale).

Fissata l'origine tra s_2 ed s_3, l'energia media $E_s = \dfrac{1}{4}\left(E_{s_1} + E_{s_2} + E_{s_3} + E_{s_4}\right) = \dfrac{1}{4}\left(2\dfrac{d^2}{4} + 2\dfrac{9d^2}{4}\right)T_s = \dfrac{5}{4} d^2 T_s$,

da cui $\dfrac{d}{2} = \sqrt{\dfrac{E_s}{5T_s}}$ e quindi $P_s(e) = \dfrac{3}{4} erfc\left(\sqrt{\dfrac{E_s}{10N_0}}\right)$.

Siccome $P_b(e) = \dfrac{1}{\log_2 m} P_s(e) = \dfrac{1}{2} P_s(e)$ e $\log_2 m E_b = E_s = 2E_b$ si ha. $P_b(e) = \dfrac{3}{8} erfc\left(\sqrt{\dfrac{E_b}{5N_0}}\right) = \dfrac{3}{8} erfc\left(\sqrt{\dfrac{h}{5}}\right)$

INVILUPPO COMPLESSO

$v(t) = \Re_e\{g(t)e^{jw_c t}\}$, con w_c pulsazione istantanea, $v(t)$ segnale modulato, reale, la cui $\mathrm{P}_v(f)$ è centrata in 0

La densità spettrale di potenza di $v(t)$ si può scrivere come

$\mathrm{P}_v(f) = \dfrac{1}{4}\left\{\mathrm{P}_g(f - f_c) + \mathrm{P}_g^*(-f - f_c)\right\}$, notare che $g(t)$ può essere complesso

Formulario di Comunicazioni Elettriche

MODULAZIONE DI AMPIEZZA

$m(t)$:segnale modulante.

$A_c \cos(2pf_c t + q_c)$:segnale di portante

$A_c m(t)\cos(2pf_c t + q_c)$:segnale modulato

In questo caso $g(t) = m(t) + 1$ e quindi $v(t) = [1 + m(t)]\cos(2pf_c t)$

Efficienza $E = \dfrac{\langle m^2(t)\rangle}{1 + \langle m^2(t)\rangle} < 1.$ Per l'utilizzo di un demodulatore coerente deve essere $m(t) + 1 > 0$

PROBABILITA' DI ERRORE DI UN 4-PSK

Detta $p = p_s(e)_{BPSK} = p_b(e)_{BPSK}$ la probabilità di errore sul simbolo e sul bit di un BPSK si ha in generale

$p_s(e)_{4-PSK} = 2p - p^2$ $\quad p_b(e)_{4-PSK} = \dfrac{1}{2} p_s(e)_{4-PSK} = p - \dfrac{p^2}{2}$

ma se il demodulatore del 4-PSK è composto di due demodulatori BPSK indipendenti si ha:

$p_s(e)_{4-PSK} = 2p$ $\quad p_b(e)_{4-PSK} = \dfrac{1}{2} p_s(e)_{4-PSK} = p$ e quindi il BPSK ed il 4-PSK hanno la stessa probabilità di errore sul bit.

PROBABILITA' DI ERRORE DI UN 16-QAM

$$p_s(e)_{media} = 3p - \frac{9}{4}p^2$$

NUMERO MEDIO DI RITRASMISSIONI IN UN SISTEMA CON CRC

$\bar{n} = \dfrac{1}{1 - p_{rit}}$ dove p_{rit} indica la probabilità di ritrasmettere

PCM

Canale BSC con probabilità di errore p, quantizzatore con n bit

Livelli di quantizzazione $M = 2^n$

$\Delta V = \dfrac{2V}{M}$ passo di quantizzazione

$N_q = \dfrac{\Delta V^2}{12}$ potenza associata all'errore di quantizzazione

$S = \dfrac{\Delta V^2}{12}(M^2 - 1)$ potenza di segnale all'uscita del quantizzatore

$\left(\dfrac{S}{N}\right)_q = (M^2 - 1)$ rapporto segnale rumore all'uscita del quantizzatore, numero puro

$\left[\left(\dfrac{S}{N}\right)_q\right]_{dB} = 2n\log_{10} 2 \cong 6n$ rapporto segnale rumore all'uscita del quantizzatore in dB

$\left(\dfrac{S}{N}\right)_q = M^2$ rapporto segnale rumore all'ingresso del quantizzatore, numero puro

$\overline{e_b^2} = N_b = \dfrac{4}{3}V^2 p \dfrac{M^2 - 1}{M^2}$ potenza associata all'errore sul bit in trasmissione

$\left(\dfrac{S}{N}\right)_{out-MAX} = \dfrac{3M^2}{1 + 4(M^2 - 1)p}$ rapporto segnale rumore massimo all'ingresso del ricevitore

$\left(\dfrac{S}{N}\right)_{out} = \dfrac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)p}$ rapporto segnale rumore medio all'ingresso del ricevitore

in dB ed in corrispondenza di vale

relazione tra massimo e medio

rapporto segnale rumore sul bit all'uscita del canale BSC

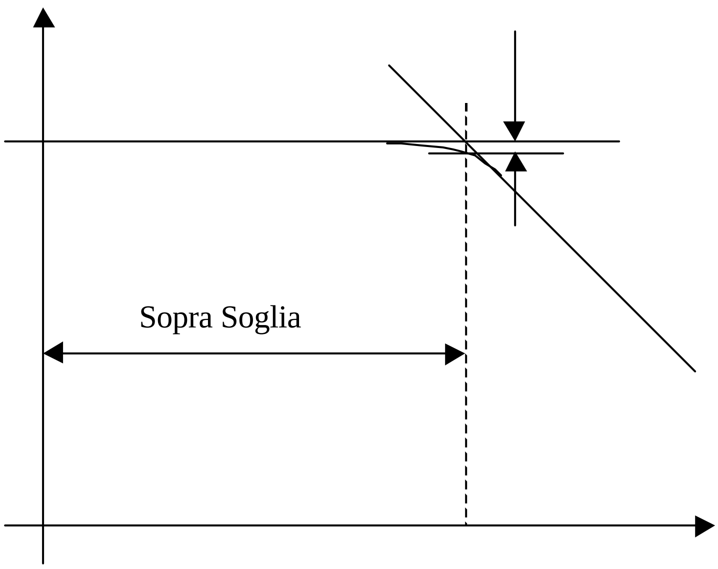
rapporto segnale rumore sul bit all'uscita del canale BSC in

è la probabilità di soglia che si ricava ugluagliando e ottenendo

valore della probabilità di soglia

è il numero massimo di bit del quantizzatore per un afissata

Dato il guadagno in , allora si può scrivere



Se aumenta si sposta a sinistra e viceversa.

Rapporto segnale rumore all'ingresso del ricevitore dove:

è la costante di Boltzmann

è la potenza di segnale all'ingresso della linea

questo fattore è dovuto alla modulante che è una sinusoide

Il rapporto segnale rumore all'uscita del demodulatore raddoppia o in si somma 3